把 $x=3$ 代入②得 $y=-1$,

$\therefore$ 方程组的解为 $\begin{cases}x=3,\\ y=-1.\end{cases}$

14.【解】$\frac{1}{a+1}-\frac{a+2}{a^2-1}\div\frac{a^2+3a+2}{a^2-2a+1}=\frac{1}{a+1}-\frac{a+2}{(a+1)(a-1)}\cdot\frac{(a-1)^2}{(a+1)(a+2)}=\frac{1}{a+1}-\frac{a-1}{(a+1)^2}=\frac{a+1-a+1}{(a+1)^2}=\frac{2}{(a+1)^2}$.

$\because a$ 满足 $a^2+2a-15=0$, $\therefore a^2+2a=15$.

$\therefore$ 原式 $=\frac{2}{a^2+2a+1}=\frac{2}{15+1}=\frac{1}{8}$.

15.【解】(1) 令 $y=0$, 则 $-2x+6=0$, $\therefore x=3$;

令 $x=0$, 则 $y=6$, $\therefore A(3,0)$, $B(0,6)$.

把 $A(3,0)$, $B(0,6)$ 代入 $y=-x^2+bx+c$,

得 $\begin{cases}-9+3b+c=0,\\ c=6,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=1,\\ c=6,\end{cases}$

$\therefore$ 抛物线所对应的函数表达式为 $y=-x^2+x+6$.

(2) 存在点 D, 使得 $\triangle BDE$ 和 $\triangle ACE$ 相似.

设点 $D(t,-t^2+t+6)$, 则 $E(t,-2t+6)$, $C(t,0)$,

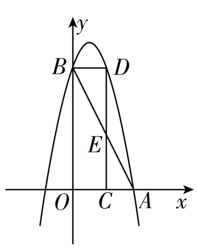
$\therefore EC=-2t+6$, $AC=3-t$, $DE=-t^2+3t$.

$\because \triangle BDE$ 和 $\triangle ACE$ 相似, $\angle BED=\angle AEC$, $\therefore \triangle ACE\backsim\triangle BDE$ 或 $\triangle ACE\backsim\triangle DBE$.

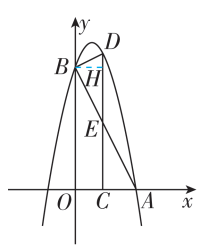
①如图(1), 当 $\triangle ACE\backsim\triangle BDE$ 时, $\angle BDE=\angle ACE=90°$,

$\therefore BD/\!/AC$, $\therefore D$ 点纵坐标为 6, $\therefore -t^2+t+6=6$,

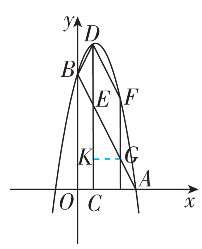
解得 $t=0$(舍去) 或 $t=1$, $\therefore D(1,6)$.



图(1)



图(2)



图(3)

②如图(2), 当 $\triangle ACE\backsim\triangle DBE$ 时, $\angle BDE=\angle CAE$. 过 B 作 $BH\perp DC$ 于 H, $\therefore \angle BHD=90°$, $BH=t$, $DH=-t^2+t$,

$\therefore \tan\angle BDE=\frac{BH}{DH}=\tan\angle CAE=\frac{OB}{OA}$, $\therefore \frac{t}{-t^2+t}=\frac{6}{3}=2$,

$\therefore -2t^2+2t=t$, 解得 $t=0$(舍去) 或 $t=\frac{1}{2}$, $\therefore D\left(\frac{1}{2},\frac{25}{4}\right)$.

综上所述, 点 D 的坐标为 $(1,6)$ 或 $\left(\frac{1}{2},\frac{25}{4}\right)$.

(3) 如图(3), $\because$ 四边形 $EGFD$ 为菱形,

$\therefore DE/\!/FG$, $DE=FG$, $ED=EG$.

设点 $D(m,-m^2+m+6)$, $F(n,-n^2+n+6)$, 则 $E(m,-2m+6)$, $G(n,-2n+6)$,

$\therefore DE=-m^2+3m$, $FG=-n^2+3n$, $\therefore -m^2+3m=-n^2+3n$, 即 $(m-n)(m+n-3)=0$.

$\because m-n\neq0$, $\therefore m+n-3=0$, 即 $m+n=3$.

$\because A(3,0)$, $B(0,6)$, $\therefore AO=3$, $BO=6$,

$\therefore AB=\sqrt{AO^2+BO^2}=3\sqrt{5}$.

过点 G 作 $GK\perp DC$ 于 K, $\therefore KG/\!/AC$, $\therefore \angle EGK=\angle BAC$,

$\therefore \cos\angle EGK=\frac{KG}{EG}=\cos\angle BAC=\frac{OA}{AB}$, 即 $\frac{|n-m|}{EG}=\frac{3}{3\sqrt{5}}$,

$\therefore EG=\sqrt{5}|n-m|=\sqrt{5}|3-2m|$.

$\because DE=EG$, $\therefore -m^2+3m=\sqrt{5}|3-2m|$,

$\therefore m^2-(3+2\sqrt{5})m+3\sqrt{5}=0$ 或 $m^2-(3-2\sqrt{5})m-3\sqrt{5}=0$, 解得 $m=\frac{3+2\sqrt{5}+\sqrt{29}}{2}$(不合题意, 舍去) 或 $m=\frac{3+2\sqrt{5}-\sqrt{29}}{2}$ 或 $m=\frac{3-2\sqrt{5}+\sqrt{29}}{2}$ 或 $m=\frac{3-2\sqrt{5}-\sqrt{29}}{2}$(不合题意, 舍去),

$\therefore m=\frac{3+2\sqrt{5}-\sqrt{29}}{2}$ 或 $m=\frac{3-2\sqrt{5}+\sqrt{29}}{2}$, $\therefore$ 点 D 的横坐标为 $\frac{3+2\sqrt{5}-\sqrt{29}}{2}$ 或 $\frac{3-2\sqrt{5}+\sqrt{29}}{2}$.

第四章 三角形

A 湖南真题诊断练

刷诊断

1. A 【解析】A 选项, 两点之间, 线段最短, 原命题正确, 符合题意; B 选项, 菱形的对角线互相垂直, 不一定相等, 原命题错误, 不符合题意; C 选项, 正五边形的外角和为 360°, 原命题错误, 不符合题意; D 选项, 直角三角形不一定是轴对称图形, 只有等腰直角三角形才是轴对称图形, 原命题错误, 不符合题意. 故选 A.

2. B 【解析】$\because AB/\!/CD$, $\therefore \angle AEG=\angle 2=50°$. $\because \angle 1=70°$, $\therefore \angle GEF=180°-\angle 1-\angle AEG=180°-70°-50°=60°$. 故选 B.

3. D 【解析】A 选项, $\because 1+2=3$, $\therefore$ 长度为 1 cm, 2 cm, 3 cm 的三条线段不能组成三角形, 本选项不符合题意; B 选项, $\because 3+5=8$, $\therefore$ 长度为 3 cm, 8 cm, 5 cm 的三条线段不能组成三角形, 本选项不符合题意; C 选项, $\because 4+5<10$, $\therefore$ 长度为 4 cm, 5 cm, 10 cm 的三条线段不能组成三角形, 本选项不符合题意; D 选项, $\because 4+5>6$, $\therefore$ 长度为 4 cm, 5 cm, 6 cm 的三条线段能组成三角形, 本选项符合题意. 故选 D.

4. D 【解析】$\because$ 点 D, E 分别为边 AB, AC 的中点, $\therefore DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线, $\therefore DE/\!/BC$, $BC=2DE$, 故选项 A、C 正确. $\because DE/\!/BC$, $\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ABC$, 故选项 B 正确. $\because \triangle ADE\backsim\triangle ABC$, $\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\frac{DE}{BC}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$, $\therefore S_{\triangle ADE}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$, 故选项 D 错误. 故选 D.

刷有所得

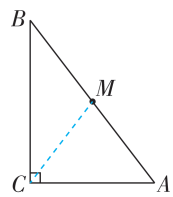
与中点有关的知识点

①三角形的中位线平行且等于第三边的一半；②直角三角形中，斜边上的中线等于斜边的一半；③平行四边形的对角线互相平分；④垂直于弦的直径平分弦且平分这条弦所对的两条弧.

5. 100　【解析】因为等腰三角形的一个底角为 40°，所以其顶角为 180°−40°×2=100°. 故答案为 100.

6. 145°　【解析】由题意得 $AC/\!/BD$，$\angle CAB=145°$，∴ $\angle ABD=\angle CAB=145°$，故答案为 145°.

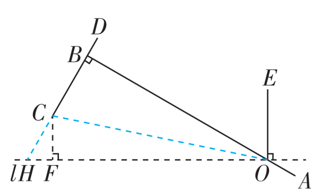
7. 5　【解析】如图，连接 CM. 在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$AC=6$，$BC=8$，∴ $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=10$. ∵ 点 M 是 AB 的中点，∴ $CM=\frac{1}{2}AB=5$. 故答案为 5.



8. $\frac{4}{5}$　【解析】在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$. ∵ $\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{4}{5}$，∴ $\cos B=\frac{BC}{AB}=\frac{4}{5}$. 故答案为 $\frac{4}{5}$.

9. 22. 5　【解析】∵ 1 宣 $=\frac{1}{2}$ 矩，1 欘 $=1\frac{1}{2}$ 宣，1 矩 = 90°，$\angle A=1$ 矩，$\angle B=1$ 欘，∴ $\angle A=90°$，$\angle B=\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times90°=67.5°$，∴ $\angle C=180°-90°-67.5°=22.5°$，故答案为 22. 5.

10. $(6-2\sqrt{3})$　【解析】如图，延长 DC 交 l 于点 H，连接 OC.



在 Rt△OBH 中，∵ $\angle BOH=90°-60°=30°$，$OB=12$，∴ $BH=12\times\tan30°=4\sqrt{3}$，∴ $OH=8\sqrt{3}$. ∵ $S_{\triangle OBH}=S_{\triangle OCH}+S_{\triangle OBC}$，∴ $\frac{1}{2}OB\cdot BH=\frac{1}{2}OH\cdot CF+\frac{1}{2}OB\cdot BC$，即 $\frac{1}{2}\times12\times4\sqrt{3}=\frac{1}{2}\times8\sqrt{3}\times CF+\frac{1}{2}\times12\times4$，解得 $CF=6-2\sqrt{3}$. 故答案为 $(6-2\sqrt{3})$.

11. (1)【证明】∵ $AC\perp AD$，$ED\perp AD$，∴ $\angle A=\angle D=90°$，∴ $\angle C+\angle ABC=90°$. ∵ $CB\perp BE$，∴ $\angle ABC+\angle EBD=90°$，∴ $\angle C=\angle EBD$，∴ △ABC∽△DEB.

(2)【解】∵ △ABC∽△DEB，∴ $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{BD}$. ∵ $AB=8$，$AC=6$，$DE=4$，∴ $\frac{8}{4}=\frac{6}{BD}$，解得 $BD=3$.

12. (1)【证明】在△ABC 和△ADE 中，

$$\begin{cases}BC=DE,\\ \angle B=\angle D,\\ AB=AD,\end{cases}$$

∴ △ABC≌△ADE(SAS).

(2)【解】∵ △ABC≌△ADE，

∴ $AC=AE$，$\angle CAE=\angle BAC=60°$，

∴ △ACE 是等边三角形，

∴ $\angle ACE=60°$.

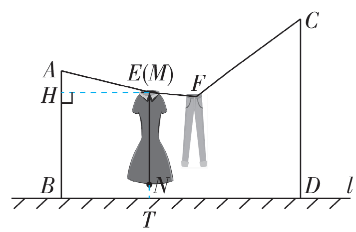
13.【解】(1) 由题意得，$EG\perp AB$，$AB\perp BD$，$EN\perp BD$，∴ 四边形 $BNEG$ 是矩形，∴ $EN=BG$.

在 Rt △AEG 中，$AE=13$ 分米，$EG=12$ 分米，∴ $AG=\sqrt{AE^2-EG^2}=\sqrt{13^2-12^2}=5$(分米)，

∴ $BG=AB-AG=14$ 分米，∴ $MN=14$ 分米.

答：该连衣裙 MN 的长度为 14 分米.

(2) 如图所示，过点 E 作 $EH\perp AB$ 于 H，延长 EN 交 BD 于 T.



由题意得，$AB\perp BD$，$ET\perp BD$，∴ 四边形 $BTEH$ 是矩形，∴ $ET=BH$.

在 Rt△AEH 中，$AE=13$ 分米，$\angle HAE=76.1°$，∴ $AH=AE\cdot\cos\angle HAE=13\times\cos76.1°\approx3.12$(分米).

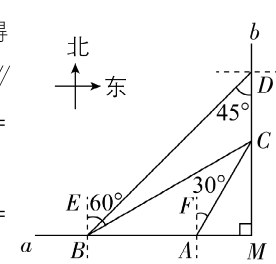
∵ $AB=19$ 分米，∴ $BH=AB-AH=15.88$ 分米，

∴ $ET=15.88$ 分米.

∵ $EN=14$ 分米，∴ $NT=ET-EN=15.88-14=1.88\approx2$(分米).

答：此时该连衣裙下端点 N 到地面水平线 l 的距离约为 2 分米.

14.【解】(1) 如图，由题意可得 $\angle CBE=60°$，$\angle CAF=30°$，$BE/\!/AF/\!/DM$，∴ $\angle BCM=\angle CBE=60°$，$\angle ACM=\angle CAF=30°$，∴ $\angle ACB=\angle BCM-\angle ACM=60°-30°=30°$.



(2) 如图，∵ $\angle CBE=60°$，∴ $\angle CBM=90°-\angle CBE=90°-60°=30°$. 由 (1) 得 $\angle ACB=30°$，∴ $\angle ABC=\angle ACB$，∴ $AB=AC$. ∵ $AB=800$，∴ $AC=800$. 在 Rt△ACM 中，$\sin\angle ACM=\frac{AM}{AC}$，$\cos\angle ACM=\frac{CM}{AC}$，∴ $AM=AC\cdot\sin\angle ACM=800\times\sin30°=800\times\frac{1}{2}=400$，$CM=AC\cdot\cos\angle ACM=800\times\cos30°=800\times\frac{\sqrt{3}}{2}=$

$400\sqrt{3}$，∴ $BM=BA+AM=800+400=1\ 200$.

∵ $\angle BDM=45°$，$\angle BMD=90°$，∴ $\angle DBM=45°$，∴ $DM=BM=1\ 200$，∴ $DC=DM-CM=1\ 200-400\sqrt{3}$，∴ 景点 C 与景点 D 之间的距离为 $(1\ 200-400\sqrt{3})$ m.

15.【解】(1) ∵ $GH\perp CE$，EF 的长为 4 米，$\angle CFG=60.3°$，

∴ $\tan\angle CFE=\tan 60.3°=\dfrac{CE}{EF}\approx 1.75$，

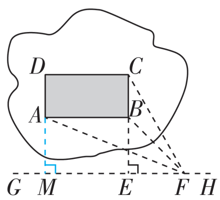
∴ $CE=7$ 米.

∵ $\angle BFG=45°$，

∴ $BE=EF=4$ 米，

∴ $CB=CE-BE=3$ 米.

(2) 过点 A 作 $AM\perp GH$ 于点 M，如图所示.



∵ $\angle AFG=21.8°$，

∴ $\tan\angle AFG=\tan 21.8°=\dfrac{AM}{MF}\approx 0.4$.

∵ $AM=BE=4$ 米，

∴ $MF=10$ 米，

∴ $AB=ME=10-4=6$（米），

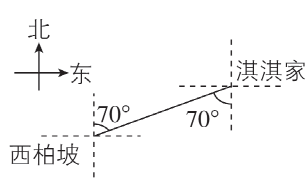
∴ 底座的底面 $ABCD$ 的面积为 $3\times 6=18$（平方米）.

B 考点突破练

考点 17　线段、角、相交线与平行线（含命题）

刷基础

1. D　【解析】如图，∵ 西柏坡位于淇淇家的南偏西 70° 方向，∴ 淇淇家位于西柏坡的北偏东 70° 方向. 故选 D.



2. D

3. A　【解析】∵ $AB\parallel CD$，∴ $\angle CDB=60°$. ∵ $CD\perp DE$，∴ $\angle CDE=90°$，∴ $\angle 1=180°-\angle CDB-\angle CDE=30°$，故选 A.

4. 40°　【解析】∵ $\angle AOC=60°$，∴ $\angle BOD=\angle AOC=60°$. ∵ $\angle DOE=20°$，∴ $\angle BOE=\angle BOD-\angle DOE=60°-20°=40°$. 故答案为 40°.

5.【证明】∵ $EM\parallel FN$，∴ $\angle FEM=\angle EFN$.

∵ EM 平分 $\angle BEF$，FN 平分 $\angle CFE$，

∴ $\angle BEF=2\angle FEM$，$\angle EFC=2\angle EFN$，

∴ $\angle FEB=\angle EFC$，∴ $AB\parallel CD$.

6. B　【解析】A 选项，两直线平行，同位角相等，故原命题是假命题；B 选项，菱形的四条边相等，是真命题；C 选项，正五边形的其中一个内角是 108°，故原命题是假命题；D 选项，单项式 $\dfrac{\pi ab^2}{3}$ 的次数是 3，故原命题是假命题. 故选 B.

刷易错

7. 5 cm 或 11 cm　【解析】当点 A，B，C 的位置如图（1）所示时，∵ $AB=8$ cm，$BC=3$ cm，∴ $AC=AB-BC=8-3=5$（cm）；当点 A，B，C 的位置如图（2）所示时，$AC=AB+BC=8+3=11$（cm）. 故答案为 5 cm 或 11 cm.

图（1）　　图（2）

易错警示

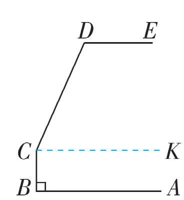
与线段相关的分类讨论

并未规定点 C 是否在线段 BC 上，因此需注意分类讨论.

刷提升

1. A　【解析】①在同一平面内，如果两条直线没有交点，那么这两条直线平行，故①是假命题；②在同一平面内，过一点有且只有一条直线与已知直线垂直，故②是假命题；③过直线外一点有且只有一条直线与已知直线平行，故③是假命题；④连接直线外一点与直线上各点的所有线段中，垂线段最短，是真命题. 综上，真命题有 1 个，故选 A.

2. D　【解析】如图，过 C 作 $CK\parallel AB$. ∵ $DE\parallel AB$，∴ $CK\parallel DE$. ∵ $BC\perp AB$，∴ $BC\perp CK$，∴ $\angle BCK=90°$. ∵ $\angle EDC=114°$，∴ $\angle DCK=180°-\angle CDE=66°$，∴ $\angle DCB=\angle DCK+\angle BCK=156°$. 故选 D.



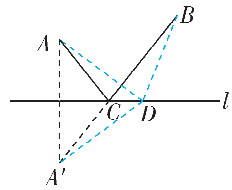
3. 20　【解析】由作图可得 OP 平分 $\angle AOB$，∴ $\angle BOP=\dfrac{1}{2}\angle AOB=\dfrac{1}{2}\times 40°=20°$. ∵ $PQ\parallel OB$，∴ $\angle OPQ=\angle BOP=20°$，故答案为 20.

4. (1)【证明】∵ $\angle BED=\angle C$，∴ $DE\parallel AC$，∴ $\angle CAG=\angle 3$. ∵ AG 平分 $\angle BAC$，∴ $\angle CAG=\angle 1$，∴ $\angle 1=\angle 3$. ∵ $\angle 1+\angle 2=90°$，∴ $\angle 3+\angle 2=90°$，即 $\angle DGH=90°$，∴ $FH\perp DE$.

(2)【解】∵ $\angle CAG=\angle 1$，$\angle BAC=68°$，∴ $\angle 1=\angle CAG=34°$，∴ $\angle 3=\angle 1=34°$. ∵ $\angle 1+\angle 2=90°$，∴ $\angle 2=90°-\angle 1=56°$. ∵ $\angle 3=\angle 4$，$\angle 1=\angle 3$，∴ $\angle 1=\angle 4$，∴ $AG\parallel DF$，∴ $\angle DFH=\angle 2=56°$.

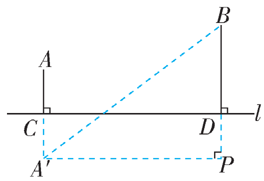
刷 素养

5.【解】(1)如图(1),作点 A 关于直线 l 的对称点 A',连接 $A'B$ 交直线 l 于点 C,此时所走路程最短. 在直线 l 上任取异于点 C 的一点 D,连接 AD,DB,$A'D$. 由轴对称的性质可得 $AC=A'C$,$AD=A'D$,$\therefore AC+BC=A'C+BC=A'B$,$AD+DB=A'D+DB$. 在 $\triangle A'BD$ 中,$A'B<A'D+BD$,$\therefore AC+BC<AD+DB$. 故答案为 D.



图(1)

(2)如图(2),延长 AC 至点 A',使得 $A'C=AC$,连接 $A'B$,则 $A'B$ 的长度为牧童需要走的最短路程.



图(2)

过点 A' 作 $A'P/\!/CD$,与 BD 的延长线交于点 P,则 $A'P\perp BD$,$A'C=PD$,$A'P=CD$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle A'BP$ 中,$BP=AC+BD=30$ 米,$A'P=CD=40$ 米,

$\therefore A'B=\sqrt{A'P^2+BP^2}=\sqrt{40^2+30^2}=50$(米),

即牧童需要走的最短路程为 50 米.

(3)如图(3),设 $ME=a$,$DM=b$,则 $DE=a+b=8$,

作 $AD\perp DE$ 于 D,$BE\perp DE$ 于 E,取 $AD=2$,$BE=4$,连接 AB,

则 $\sqrt{a^2+16}+\sqrt{b^2+4}$ 的值可看成 $AM+BM$ 的值.

当 A,M,B 三点共线时,$AM+BM$ 的值最小,

最小值为 AB 的长.

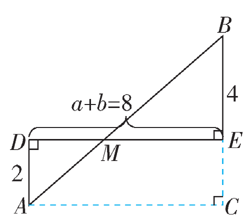
作 $AC\perp BE$,交 BE 延长线于点 C,

则 $CE=AD$,$DE=AC$,

则 $BC=4+2=6$,$AC=a+b=8$,

$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10$,

$\therefore$ $\sqrt{a^2+16}$ + $\sqrt{b^2+4}$ 的最小值为 10.



图(3)

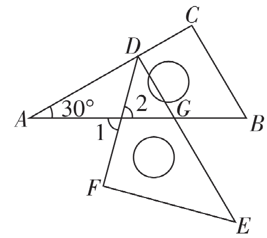
考点 18　三角形的基本性质

刷 基础

1. B【解析】A 选项,$1+2=3$,不符合题意;B 选项,$3+4>5$,符合题意;C 选项,$7+7<15$,不符合题意;D 选项,$6+8<18$,不符合题意. 故选 B.

> **刷有所得**
>
> 三角形三边关系
>
> 两边之和大于第三边,两边之差小于第三边.

2. A【解析】如图. $\because DE/\!/BC$,$\therefore \angle B=\angle DGA=60°$. $\because \angle FDE=45°$,$\therefore \angle 2=180°-\angle FDE-\angle DGA=75°$,$\therefore \angle 1=\angle 2=75°$,故选 A.

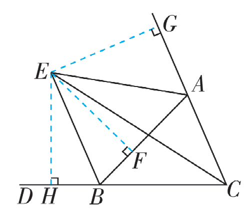


3. 110°　【解析】$\because OA=OB$,$\angle A=55°$,$\therefore \angle B=\angle A=55°$,$\therefore \angle BOD=\angle A+\angle B=55°+55°=110°$. 故答案为 110°.

4. 6 或 10 或 12　【解析】由方程 $x^2-6x+8=0$,得 $x=2$ 或 4. 当三角形的三边长是 2,2,2 时,周长是 6;当三角形的三边长是 4,4,4 时,周长是 12;当三角形的三边长是 2,2,4 时,$2+2=4$,不符合三角形的三边关系,舍去;当三角形的三边长是 4,4,2 时,周长是 $4+4+2=10$. 综上所述,这个三角形的周长是 6 或 12 或 10. 故答案为 6 或 10 或 12.

5. B　【解析】由题图(1)的折叠方式可知,$\angle BAD=\angle CAD$,所以 AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线. 由题图(2)的折叠方式可知,$\angle ADB=\angle ADB'$. 因为 $\angle ADB+\angle ADB'=180°$,所以 $\angle ADB=\angle ADB'=90°$,所以 $AD\perp BC$,所以 AD 是 $\triangle ABC$ 的高线. 由题图(3)的折叠方式可知,$CD=BD$,所以 AD 是 $\triangle ABC$ 的中线. 故选 B.

6. C　【解析】如图,作 $EH\perp BD$ 于点 H,$EF\perp AB$ 于点 F,$EG\perp AC$ 交 CA 的延长线于点 G. $\because \angle ACB$ 的平分线 CE 与 $\angle ABD$ 的平分线 BE 交于点 E,$\therefore EH=EF$,$EH=EG$,$\therefore EF=EG$,



$\therefore AE$ 平分 $\angle BAG$,$\therefore \angle BAE=\frac{1}{2}\angle BAG=\frac{1}{2}(180°-\angle BAC)$,

$\therefore$ 只需要知道 $\angle BAC$ 的度数即可求出 $\angle BAE$ 的度数. 故选 C.

7. 1∶2　【解析】$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中,AD 是 BC 边上的中线,$\therefore S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ACD}$. $\because DE\perp AB$,$DF\perp AC$,$\therefore \frac{1}{2}AB\cdot DE=\frac{1}{2}AC\cdot DF$. $\because AB=2AC$,$\therefore 2DE=DF$,$\therefore DE$ 与 DF 的长度之比是 1∶2,故答案为 1∶2.

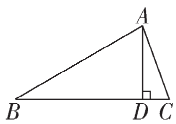
8. 6　【解析】$\because DE$ 是 AB 的垂直平分线,$\therefore AE=BE$,$\angle EDB=90°$,$\therefore \angle A=\angle ABE$. $\because BE$ 平分 $\angle ABC$,$\angle EDB=90°$,$\angle C=90°$,$DE=2$,$\therefore \angle CBE=\angle ABE$,$ED=EC=2$,$\therefore \angle A=\angle CBE=\angle ABE$. $\because \angle C=90°$,$\therefore \angle A+\angle CBE+\angle ABE=90°$,$\therefore \angle A=\angle CBE=\angle ABE=30°$,$\therefore AE=BE=2EC=4$,$\therefore AC=AE+EC=6$,故答案为 6.

刷 易错

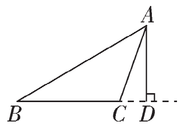
9. 80 或 40　【解析】当 $\triangle ABC$ 为锐角三角形时,如图(1).

$\because \angle BAD=180°-\angle B-\angle ADB=180°-30°-90°=60°$,

$\therefore \angle BAC=\angle BAD+\angle CAD=60°+20°=80°$.



图(1)



图(2)

当$\triangle ABC$为钝角三角形时,如图(2).

$\because \angle BAD=180°-\angle B-\angle ADB=180°-30°-90°=60°$,

$\therefore \angle BAC=\angle BAD-\angle CAD=60°-20°=40°$.

综上所述,$\angle BAC=80°$或$40°$. 故答案为 80 或 40.

易错警示

三角形的高的位置

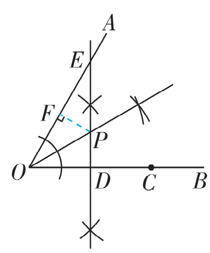
锐角三角形的高在三角形内部,钝角三角形的高可能在三角形外部,也可能在三角形内部. 所以要分类讨论高的位置以判断角的情况.

刷 提升

1. D 【解析】$\because 2+3>4,2+4>5,2+5>6,3+4>5,3+4>6,3+5>6,4+5>6$,$\therefore$ 能围成三角形的三条线段长度分别为 2,3,4;2,4,5;2,5,6;3,4,5;3,4,6;3,5,6;4,5,6,共有 7 种,故选 D.

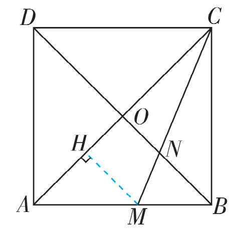
2. D 【解析】$\because AP_1$为$\triangle ABC$的中线,$\triangle ABP_1$的面积为 1,$\therefore S_{\triangle AP_1C}=S_{\triangle AP_1B}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=1$. $\because AP_2$为$\triangle AP_1C$的中线,$S_{\triangle AP_1C}=1$,$\therefore S_{\triangle AP_2C}=\frac{1}{2}S_{\triangle AP_1C}=\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}$. $\because AP_3$为$\triangle AP_2C$的中线,$S_{\triangle AP_2C}=\frac{1}{2}$,$\therefore S_{\triangle AP_3C}=\frac{1}{2}S_{\triangle AP_2C}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}\times1$,…,按此规律,$AP_n$为$\triangle AP_{n-1}C$的中线,则$\triangle AP_nC$的面积为$S_{\triangle AP_nC}=\frac{1}{2^{n-1}}\times1=\frac{1}{2^{-(1-n)}}\times1=2^{1-n}$,故选 D.

3. 30° 6 【解析】根据作图痕迹可知射线OP是$\angle AOB$的平分线,ED是线段OC的垂直平分线,$\therefore PD\perp OC$,$\angle AOP=\frac{1}{2}\angle AOB=30°$. 如图,过点$P$作$PF\perp OA$于$F$. 由角平分线的性质,得$PF=PD=3$ cm. $\because \angle PEF=90°-\angle AOD=30°$,$\angle PFE=90°$,$\therefore PE=2PF=6$ cm. 故答案为 30°,6.



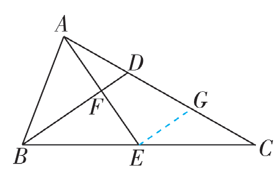
4. 13° 【解析】$\because$将$\triangle AED$沿着ED翻折,得到$\triangle FED$,$\therefore \angle EFD=\angle A=16°$. $\because \triangle FBD$为等腰直角三角形且$\angle BFD=90°$,$\therefore \angle FDB=45°$. $\because \angle FDB$是$\triangle ADO$的一个外角,$\therefore \angle FDB=\angle A+\angle AOD$,$\therefore \angle AOD=45°-16°=29°$. $\because \angle AOD$是$\triangle EFO$的一个外角,$\therefore \angle EOD=\angle EFO+\angle FEO$,$\therefore \angle FEO=29°-16°=13°$,即$\angle FEC=13°$,故答案为 13°.

5. 67. 5° $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 【解析】$\because$四边形$ABCD$是正方形,$\therefore AC\perp BD$,$\angle ABC=\angle BCD=\angle BAD=90°$. 又$\because AC$是对角线,$\therefore \angle ACB=\frac{1}{2}\angle BCD=45°$,$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BAD=45°$. $\because CM$是$\angle ACB$的平分线,$\therefore \angle BCM=\frac{1}{2}\angle ACB=22.5°$,$\therefore \angle CMB=180°-90°-22.5°=67.5°$. 过$M$点作$MH\perp AC$于$H$,如图,$\therefore HM/\!/BD$. $\because \angle HAM=45°$,$\therefore AH=HM=\frac{\sqrt{2}}{2}AM=1$. $\because CM$平分$\angle ACB$,$HM\perp AC$,$MB\perp CB$,$\therefore BM=HM=1$,$\therefore AB=\sqrt{2}+1$,$\therefore AC=\sqrt{2}AB=\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=2+\sqrt{2}$,$\therefore OC=\frac{1}{2}AC=\frac{\sqrt{2}}{2}+1$,$HC=AC-AH=\sqrt{2}+1$. $\because ON/\!/HM$,$\therefore \triangle CON\backsim\triangle CHM$,$\therefore \frac{ON}{HM}=\frac{OC}{CH}$,即$\frac{ON}{1}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{\sqrt{2}+1}$,解得$ON=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故答案为 67. 5°,$\frac{\sqrt{2}}{2}$.



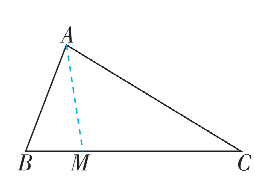
刷 素养

6. 【解】(1)如图(1),过点E作$EG/\!/BD$,交AC于点G. 由$\angle ABC$是"线垂"三角形ABC的"分角",$AB<BC$,可知$BC=2AB$. $\because AE$是$\triangle ABC$的中线,$\therefore BC=2BE$,$\therefore AB=BE$. $\because BD$是$\triangle ABC$的角平分线,$\therefore AF=EF$. $\because EG/\!/BD$,$\therefore \triangle AFD\backsim\triangle AEG$,$\triangle CEG\backsim\triangle CBD$,$\therefore \frac{DF}{EG}=\frac{AF}{AE}=\frac{1}{2}$,$\frac{EG}{BD}=\frac{EC}{BC}=\frac{1}{2}$,$\therefore DF=\frac{1}{2}EG$,$BD=2EG$,$\therefore BD:FD=4:1$,$\therefore BF:FD=3:1$,$\therefore BF:FD$的值等于 3.



图(1)

(2)如图(2),在边BC上取点M,使$BM=\frac{1}{2}AB$,连接AM,那么$\triangle ABM$是"线垂三角形",$\angle B$是"分角",可得$\frac{BM}{BA}=\frac{BA}{BC}=\frac{1}{2}$. $\because \angle B$为公共角,$\therefore \triangle ABM\backsim\triangle CBA$,



图(2)

$\therefore \frac{AM}{CA}=\frac{1}{2}$,$\therefore \triangle ACM$也是"线垂三角形",$\angle MAC$是"分角".

(3)如图(3),作$\angle B$和$\angle CAM$的平分线,交点为O,连接OC,延长AO,交边BC于点N,则$\angle MAN=\angle NAC$. 由(2)得$\triangle ABM\backsim\triangle CBA$,$\therefore \angle BAM=\angle ACB$. $\because \angle ANB=\angle ACB+\angle NAC$,$\angle BAN=\angle BAM+\angle MAN$,$\therefore \angle ANB=\angle BAN$,$\therefore BA=BN=\frac{1}{2}BC=CN$. $\because BO\perp AN$,$\therefore ON=OA=a$.

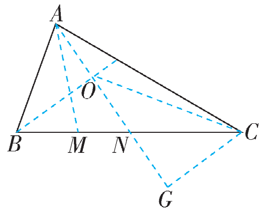
延长 AN 至点 G，使 $NG=ON$，连接 CG.

$\because BN=CN$，$\angle BNO=\angle CNG$，$ON=NG$，

$\therefore \triangle BON \cong \triangle CGN$，$\therefore CG=OB=b$，$\angle CGN=\angle BON=90°$.

在 Rt$\triangle OGC$ 中，由勾股定理得 $OG^2+CG^2=OC^2$，即 $(2a)^2+b^2=c^2$，

$\therefore 4a^2+b^2=c^2$.



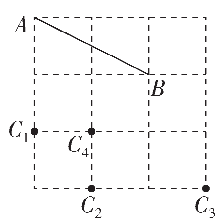
图(3)

考点 19 等腰(边)三角形

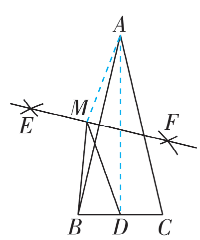
刷基础

1. A 【解析】$\because \angle A=\angle ACD$，$\therefore AD=CD$. $\because AB=AD+BD=10$，$\therefore CD+BD=10$，$\therefore \triangle BCD$ 的周长是 $BD+DC+BC=10+8=18$，故选 A.

2. D 【解析】如图，使得$\triangle ABC$ 为等腰三角形的点 C 有 4 个. 故选 D.



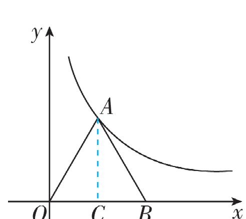
3. C 【解析】如图，连接 AM，AD. 由作图可知，EF 为线段 AB 的垂直平分线，$\therefore AM=BM$，$\therefore BM+DM=AM+DM\geqslant AD$，$\therefore BM+DM$ 的最小值为 AD 的长. $\because AB=AC=2\sqrt{17}$，$D$ 为 BC 的中点，$\therefore AD\perp BC$，$BD=\frac{1}{2}BC=2$，$\therefore \angle ADB=90°$，$\therefore AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{(2\sqrt{17})^2-2^2}=8$，$\therefore BM+DM$ 的最小值为 8，故选 C.



4. (1)【证明】$\because CF/\!/AB$，$\therefore \angle B=\angle FCD$，$\angle BED=\angle F$. $\because AD$ 是$\angle BAC$ 的平分线，$AB=AC$，$\therefore BD=CD$，$\therefore \triangle BDE\cong\triangle CDF$(AAS).

(2)【解】$\because \triangle BDE\cong\triangle CDF$，$\therefore BE=CF=4$，$\therefore AB=AE+BE=1+4=5$. $\because AB=AC$，AD 是$\angle BAC$ 的平分线，$\therefore AD\perp BC$，$BD=CD$，$\therefore BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，$\therefore BC=2BD=8$.

5. D 【解析】如图，过点 A 作 $AC\perp x$ 轴于点 C. $\because \triangle AOB$ 为等边三角形，$\therefore \angle AOB=60°$，$OC=BC$. 设点 A 的横坐标为 a，则 $CO=a$，$AO=AB=OB=2a$. 根据勾股定理可得，$AC=\sqrt{AO^2-CO^2}=\sqrt{3}a$. $\because S_{\triangle OAB}=4\sqrt{3}$，$\therefore \frac{1}{2}OB\times AC=4\sqrt{3}$，$\therefore \frac{1}{2}\times 2a\times\sqrt{3}a=4\sqrt{3}$，解得 $a=2$(负值已舍去)，$\therefore$ 点 $A(2,2\sqrt{3})$. 把 $A(2,2\sqrt{3})$ 代入 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$ 得，$k=4\sqrt{3}$，故选 D.



6. 15° 【解析】$\because$ 三角形 ABC 为等边三角形，D 为边 BC 的中点，$\therefore \angle BAD=\angle CAD=\frac{1}{2}\angle BAC=30°$，$AD\perp BC$，$\therefore \angle ADC=90°$. $\because$ 以点 A 为圆心，AD 长为半径画弧，与 AC 边的交点为 E，$\therefore AD=AE$，$\therefore \angle ADE=\angle AED=\frac{1}{2}(180°-\angle DAC)=75°$，$\therefore \angle CDE=\angle ADC-\angle ADE=15°$，故答案为 15°.

7. (1)【证明】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，$\therefore AB=CD$，且$\angle BAD=\angle CDA=90°$. $\because \triangle ADE$ 是等边三角形，$\therefore AE=DE$，且$\angle EAD=\angle EDA=60°$，$\therefore \angle BAE=\angle BAD+\angle EAD=150°$，$\angle CDE=\angle CDA+\angle EDA=150°$，$\therefore \angle BAE=\angle CDE$. 在$\triangle BAE$ 和$\triangle CDE$ 中，$\begin{cases}AB=CD,\\ \angle BAE=\angle CDE,\\ AE=DE,\end{cases}$ $\therefore \triangle BAE\cong\triangle CDE$(SAS).

(2)【解】$\because AB=AD$，且 $AD=AE$，$\therefore AB=AE$，$\therefore \angle ABE=\angle AEB$. 由(1)知$\angle BAE=150°$，$\therefore \angle AEB=(180°-150°)\div2=15°$.

刷易错

8. C 【解析】$\because \triangle ABC$ 是一个等腰三角形，$AB=10$ cm，$BC=12$ cm，$\therefore$ 当 $AC=AB=10$ cm 时，满足三角形的三边关系，此时$\triangle ABC$ 的周长为 $10+10+12=32$(cm)，当 $AC=BC=12$ cm 时，满足三角形的三边关系，此时$\triangle ABC$ 的周长为 $10+12+12=34$(cm)，$\therefore \triangle ABC$ 的周长为 32 cm 或 34 cm. 故选 C.

易错警示

等腰三角形的分类讨论

当题目中没有明确说明所求边是腰还是底边时，需要分类讨论，求出边长之后要验算是否满足三角形的三边关系.

刷提升

1. C 【解析】$\because \triangle BFD\cong\triangle CAB\cong\triangle DEC$，$AB=2AC=2a$，$\therefore DF=CE=AB=2AC=2DE=2BF=2a$，$\therefore AE=EF=FA=a=AC$，$\therefore \triangle AEF$ 为等边三角形，$\therefore \angle EAF=\angle FEA=\angle EFA=60°$，$\therefore \angle AFC=\angle ACF=\frac{1}{2}\angle EAF=30°$，$\therefore \angle EFC=60°+30°=90°$，$\therefore CF=EF\cdot\tan\angle FEC=\sqrt{3}a$，故选 C.

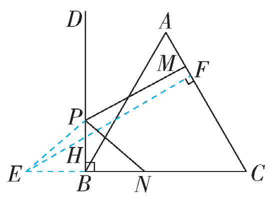
2. 80° 【解析】$\because l_1/\!/l_2$，$\therefore \angle MAB+\angle NBA=180°$. $\because \angle MAB=120°$，$\therefore \angle NBA=180°-120°=60°$. 由作图知 $BA=BC$，$\therefore \angle BAC=\angle BCA=20°$，$\therefore \angle 1=\angle BAC+\angle NBA=20°+60°=80°$. 故答案为 80°.

3. 3 【解析】当等腰三角形的底边长 BC 是腰长 AB 的 2 倍时，$\because AB=AC=6$，$\therefore$ 底边 BC 的长为 12. $\because 6+6=12$，$\therefore$ 长为 6，6，12 的线段不能组成三角形. 当等腰三角形的腰长 AB 是底边长 BC 的 2 倍时，$\because AB=AC=6$，$\therefore$ 底边 BC 的长为 3，满足三

角形的三边关系. 综上所述,底边 BC 的长为 3,故答案为 3.

4. 17 【解析】∵ 点 P 与点 A 关于直线 DQ 对称,$\angle ADQ=28°$,∴ $\angle PDQ=\angle ADQ=28°$,$AD=DP$. ∵ $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBD$ 为两个全等的等腰直角三角形,∴ $\angle CDB=\angle ADB=45°$,$CD=AD$,∴ $\angle CDP=\angle CDB+\angle ADB+\angle PDQ+\angle ADQ=146°$. ∵ $AD=DP$,$CD=AD$,∴ $CD=DP$,∴ $\angle DCP=\frac{1}{2}(180°-\angle CDP)=17°$. 故答案为 17.

5. 8.5 【解析】如图,作点 N 关于直线 BD 的对称点 E,连接 PE,则 $PN=PE$,$BN=BE$,∴ $MP+NP=MP+PE$,∴ 当 $MP+PE$ 取最小值时,$MP+NP$ 的值最小. 根据垂线段最短,得 $MP+PE$ 的最小值就是点 E 到直线 AC 的距离. 过点 E 作 $EF\perp AC$ 于点 F,交 BD 于点 H,∴ 当 P 与 H 重合,点 M 与 F 重合时,$MP+NP$ 取得最小值,且最小值为 EF 的长. ∵ 当 $MP+NP$ 的值最小时,$CM=6$,∴ $CF=6$. ∵ $\triangle ABC$ 为等边三角形,∴ $AC=BC$,$\angle ACB=60°$,∴ $\angle CEF=30°$,∴ $EC=2CF=12$. ∵ $EC=2BN+CN=12$,$CN=5$,∴ $BN=3.5$,∴ $BC=CN+BN=8.5$,∴ $AC=BC=8.5$,故答案为 8.5.

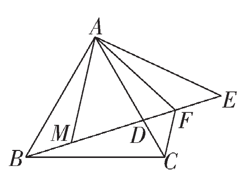


刷素养

6. 【证明】(1) ∵ AF 平分 $\angle CAE$,∴ $\angle EAF=\angle CAF$. ∵ $AB=AC$,$AB=AE$,∴ $AE=AC$. 在 $\triangle ACF$ 和 $\triangle AEF$ 中,$\begin{cases}AC=AE,\\ \angle CAF=\angle EAF,\\ AF=AF,\end{cases}$

∴ $\triangle ACF\cong\triangle AEF$(SAS),∴ $\angle E=\angle ACF$. ∵ $AB=AE$,∴ $\angle E=\angle ABE$,∴ $\angle ABE=\angle ACF$.

(2) 如图(1). 由(1)知 $\triangle ACF\cong\triangle AEF$,∴ $EF=CF=BM$. 由(1)知 $\angle E=\angle ACF=\angle ABM$. 在 $\triangle ABM$ 和 $\triangle ACF$ 中,$\begin{cases}AB=AC,\\ \angle ABM=\angle ACF,\\ BM=CF,\end{cases}$

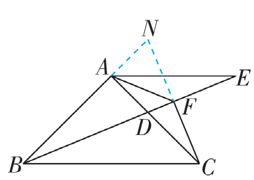


图(1)

∴ $\triangle ABM\cong\triangle ACF$(SAS),∴ $AM=AF$,$\angle BAM=\angle CAF$. ∵ $AB=AC$,$\angle ABC=60°$,∴ $\triangle ABC$ 是等边三角形,∴ $\angle BAC=60°$,∴ $\angle MAF=\angle MAC+\angle CAF=\angle MAC+\angle BAM=\angle BAC=60°$. ∵ $AM=AF$,∴ $\triangle AMF$ 为等边三角形.

(3) 如图(2),延长 BA,CF 交于点 N.

∵ $AE/\!/BC$,∴ $\angle E=\angle EBC$. ∵ $AB=AE$,∴ $\angle ABE=\angle E$,∴ $\angle ABF=\angle CBF$. ∵ $\angle ABC=45°$,$AB=AC$,∴ $\angle ABF=\angle CBF=22.5°$,$\angle ACB=45°$,∴ $\angle BAC=180°-45°-45°=90°$. 由(1)知 $\angle ACF=\angle ABF=22.5°$,∴ $\angle BFC=180°-22.5°-45°-22.5°=90°$,∴ $\angle BFN=\angle BFC=90°$. 在 $\triangle BFN$ 和 $\triangle BFC$ 中,$\begin{cases}\angle NBF=\angle CBF,\\ BF=BF,\\ \angle BFN=\angle BFC,\end{cases}$ ∴ $\triangle BFN\cong\triangle BFC$(ASA),∴ $CF=FN$,即 $CN=2CF$. 由(1)知 $\triangle ACF\cong\triangle AEF$,∴ $CF=EF$,∴ $CN=2EF$. ∵ $\angle BAC=90°$,∴ $\angle NAC=\angle BAD=90°$. 在 $\triangle BAD$ 和 $\triangle CAN$ 中,$\begin{cases}\angle ABD=\angle ACN,\\ AB=AC,\\ \angle BAD=\angle CAN,\end{cases}$



图(2)

∴ $\triangle BAD\cong\triangle CAN$(ASA),∴ $BD=CN$,∴ $BD=2EF$.

考点 20　直角三角形

刷基础

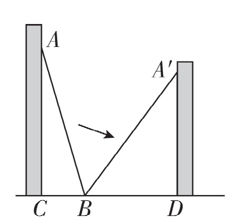
1. C 【解析】∵ $a/\!/b$,∴ $\angle 1=\angle ABC=55°$. ∵ $\angle BAC=90°$,∴ $\angle ABC+\angle 2=90°$,∴ $\angle 2=35°$,故选 C.

2. B 【解析】∵ $\angle AFB=90°$,点 D 是 AB 的中点,∴ $DF=\frac{1}{2}AB=4$. ∵ $BC=14$,点 D,E 分别是边 AB,AC 的中点,∴ $DE=\frac{1}{2}BC=7$,∴ $EF=DE-DF=3$,故选 B.

3. 3 【解析】由题意可知,$\angle ACB=90°$,$\angle ABC=30°$,$AC=1$ m,∴ $AB=2AC=2$ m,∴ 木杆折断之前高度为 $AC+AB=1+2=3$(m),故答案为 3.

4. 22 【解析】∵ AD 是 $\triangle ABC$ 的高,∴ $\angle ADB=\angle ADC=90°$. ∵ E,F 分别是 AB,AC 的中点,∴ $DE=\frac{1}{2}AB=6$,$DF=\frac{1}{2}AC=5$,$AE=\frac{1}{2}AB=6$,$AF=\frac{1}{2}AC=5$,∴ 四边形 $AEDF$ 的周长为 $AE+DE+DF+AF=22$,故答案为 22.

5. C 【解析】如图,在 Rt$\triangle ABC$ 中,$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{2.4^2+0.7^2}=2.5$(米). 根据题意知,$A'B=AB=2.5$ 米,∴ 在 Rt$\triangle A'BD$ 中,$BD=\sqrt{A'B^2-A'D^2}=\sqrt{2.5^2-2^2}=1.5$(米),∴ $CD=BC+BD=0.7+1.5=2.2$(米). 故选 C.



6. A 【解析】由折叠的性质可知,$\angle EAD=\angle CAD$,$AC=AE$,$\angle AED=\angle C$. ∵ $\angle C=90°$,$\angle B=30°$,∴ $AC=\frac{1}{2}AB$,$\angle AED=90°$. ∵ $\angle BAC=180°-30°-90°=60°$,∴ $\angle EAD=\angle CAD=\frac{1}{2}\angle BAC=30°$,∴ $DE=\frac{1}{2}AD$. ∵ $AC=AE$,∴ $AE=\frac{1}{2}AB$.

$\because AB=4\sqrt{3}$，$\therefore AE=\frac{1}{2}AB=2\sqrt{3}$. 设 $DE=x$，则 $AD=2x$. 在 Rt△AED 中，根据勾股定理，得 $AE^2+DE^2=AD^2$，$\therefore (2\sqrt{3})^2+x^2=(2x)^2$，解得 $x=2$（负值已舍去），$\therefore DE=2$. 故选 A.

7.【解】在△CHB 中，因为 $CH^2+BH^2=8^2+6^2=100$，$BC^2=100$，所以 $CH^2+BH^2=BC^2$，所以△HBC 是直角三角形，且∠$CHB=90°$. 设 $AC=AB=x$ 千米，则 $AH=AB-BH=(x-6)$ 千米. 在 Rt△ACH 中，$AC=x$，$AH=x-6$，$CH=8$，由勾股定理得 $AC^2=AH^2+CH^2$，所以 $x^2=(x-6)^2+8^2$，解得 $x=\frac{25}{3}$，$\therefore$ 原路线 AC 的长为 $\frac{25}{3}$ 千米.

刷 易错

8. $\sqrt{7}$ 或 5 【解析】若斜边长为 4，则 $x=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$；若斜边长为 x，则 $x=\sqrt{4^2+3^2}=5$. 综上所述，x 的值为 $\sqrt{7}$ 或 5. 故答案为 $\sqrt{7}$ 或 5.

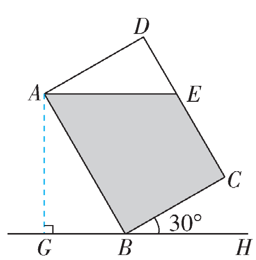
易错警示

与直角三角形的三边有关的分类讨论

本题所求的直角三角形的第三条边的长，需分类讨论所求边是斜边还是直角边.

刷 提升

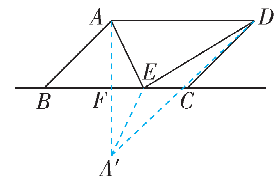
1. D 【解析】过点 A 作 $AG\perp BH$，垂足为 G，如图. $\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，$\therefore$ ∠$ABC=90°$. $\because$ ∠$CBH=30°$，$\therefore$ ∠$ABG=180°-$∠$ABC-$∠$CBH=60°$，$\therefore$ ∠$BAG=30°$，$\therefore BG=\frac{1}{2}AB=12$ cm. 在 Rt△AGB 中，$AG=\sqrt{AB^2-BG^2}=12\sqrt{3}$ cm. 故选 D.



2. B 【解析】$\because$ 沿过点 A 的直线将纸片折叠，使点 B 落在边 BC 上的点 D 处，$\therefore AD=AB=2$，∠$B=$∠ADB. $\because$ 折叠纸片，使点 C 与点 D 重合，$\therefore CE=DE$，∠$C=$∠CDE. $\because$ ∠$BAC=90°$，$\therefore$ ∠$B+$∠$C=90°$，$\therefore$ ∠$ADB+$∠$CDE=90°$，$\therefore$ ∠$ADE=90°$，$\therefore AD^2+DE^2=AE^2$. 设 $AE=x$，则 $CE=DE=3-x$，$\therefore 2^2+(3-x)^2=x^2$，解得 $x=\frac{13}{6}$，$\therefore AE=\frac{13}{6}$，$\therefore \sin$∠$DEA=\frac{AD}{AE}=\frac{2}{\frac{13}{6}}=\frac{12}{13}$. 故选 B.

3. 18 【解析】根据勾股定理得，正方形 A 与 B 的面积的和是正方形 E 的面积，正方形 C 与 D 的面积的和是正方形 F 的面积，正方形 E 与 F 的面积的和是正方形 M 的面积，$\therefore$ 正方形 A,B,C,D,E,F 的面积之和为 2 个正方形 M 的面积. $\because$ 正方形 M 的面积是 $3^2=9$，$\therefore$ 正方形 A,B,C,D,E,F 的面积之和为 $9\times2=18$. 故答案为 18.

4. $2\sqrt{17}$ 【解析】如图，作点 A 关于 BC 的对称点 A'，连接 $A'D$，$A'E$，设 AA' 交 BC 于点 F，则 $A'E=AE$，$\therefore AE+DE=A'E+DE\geqslant A'D$，$\therefore A'D$ 的长即为 $AE+DE$ 的最小值. 由轴对称的性质可得 $A'F=AF$，∠$AFB=90°$. $\because$ ∠$ABC=45°$，$\therefore$ ∠$BAF=90°-$∠$ABF=90°-45°=45°$，$\therefore$ ∠$ABF=$∠BAF，$\therefore AF=BF$. 在 Rt△AFB 中，根据勾股定理可得 $AB^2=AF^2+BF^2=2AF^2$，即 $2AF^2=4^2$，$\therefore AF=2\sqrt{2}$，$\therefore A'F=AF=2\sqrt{2}$，$\therefore AA'=AF+A'F=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore AD/\!/BC$，$AD=BC=6$，$\therefore$ ∠$A'AD=$∠$AFB=90°$. 在 Rt△$A'AD$ 中，根据勾股定理可得 $A'D=\sqrt{AA'^2+AD^2}=\sqrt{(4\sqrt{2})^2+6^2}=2\sqrt{17}$，$\therefore AE+DE$ 的最小值为 $2\sqrt{17}$，故答案为 $2\sqrt{17}$.



刷 素养

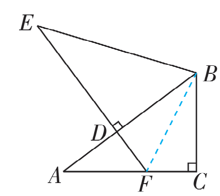
5.【解】(1) 解法 1：$DF=FC$. 理由如下：如图(1)，连接 BF.

在 Rt△CBF 和 Rt△DBF 中，

$\begin{cases}BC=BD,\\BF=BF,\end{cases}$

$\therefore$ Rt△$CBF\cong$Rt△DBF(HL)，

$\therefore DF=CF$.



图(1)

解法 2：$DF=FC$. 理由如下：根据题意得，$AB=BE=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

$\therefore AD=AB-BD=2$，$\tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{3}{4}$，$\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{4}{5}$.

$\because \tan A=\frac{DF}{AD}=\frac{3}{4}$，$\cos A=\frac{AD}{AF}=\frac{4}{5}$，

$\therefore DF=\frac{3}{4}AD=2\times\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$，$AF=AD\div\frac{4}{5}=2\div\frac{4}{5}=\frac{5}{2}$，

$\therefore CF=AC-AF=\frac{3}{2}$，$\therefore DF=CF$.

(2)“善思小组”的观点正确. 理由：如图(2)，过点 E 作 $EG/\!/AC$，交射线 CD 于点 G，则∠$NGE=$∠ACN.

根据题意得，$BC=BD$，$ED=AC$，∠$EDB=$∠$ACB=90°$，

$\therefore$ ∠$BDC=$∠BCD，∠$BDC+$∠$EDG=90°$，∠$BCD+$∠$ACN=90°$，

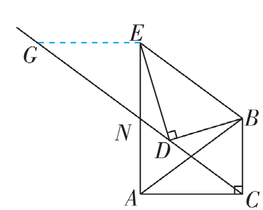
$\therefore$ ∠$EDG=$∠ACN，$\therefore$ ∠$EDG=$∠$ACN=$∠EGD，

$\therefore EG=ED=AC$.

在 △CNA 和 △GNE 中，

$\begin{cases}∠ANC=∠ENG,\\∠ACN=∠NGE,\\CA=GE,\end{cases}$

$\therefore$ △$CNA\cong$△GNE(AAS)，



图(2)

$\therefore AN=NE$，$\therefore$ 点 N 是 AE 的中点.

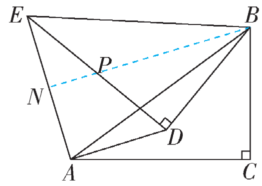
(3)存在. AD 的长为 $\dfrac{8\sqrt{13}}{13}$ 或 $2\sqrt{13}$. 当 $\angle EAD=90°$ 时，如图(3)所示，取 EA 的中点 N，连接 BN，交 ED 于点 P.

$\because BA=BE$，$EN=AN$，$\therefore BN\perp EA$，

$\therefore BN/\!/AD$，$\angle ENP=90°$，

$\therefore \dfrac{EN}{NA}=\dfrac{EP}{PD}=1$，$\angle PEN=90°-\angle EPN=90°-\angle BPD=\angle DBP$，

$\therefore EP=PD=\dfrac{1}{2}ED=2$，$\therefore PB=\sqrt{PD^2+BD^2}=\sqrt{13}$.



图(3)

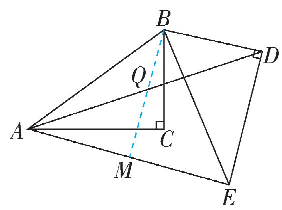
$\because \angle PEN=\angle DBP$，$\therefore \sin\angle PEN=\sin\angle DBP=\dfrac{AD}{ED}=\dfrac{PD}{PB}$，

$\therefore \dfrac{AD}{4}=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$，$\therefore AD=\dfrac{8\sqrt{13}}{13}$.

当 $\angle AED=90°$ 时，如图(4)所示，取 EA 的中点 M，连接 BM，交 AD 于点 Q. $\because BA=BE$，$\therefore BM\perp EA$，$\therefore BM/\!/DE$，易得四边形 $BMED$ 是矩形，

$\therefore \dfrac{AM}{ME}=\dfrac{AQ}{QD}=1$，$BD=ME=AM=3$，

$\therefore MQ=\dfrac{1}{2}ED=2$，$\therefore AQ=\sqrt{QM^2+AM^2}=\sqrt{13}$，



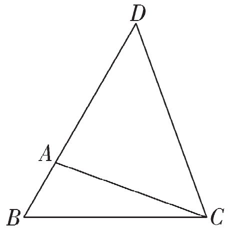
图(4)

$\therefore AD=2AQ=2\sqrt{13}$. 综上所述，$AD$ 的长为 $\dfrac{8\sqrt{13}}{13}$ 或 $2\sqrt{13}$.

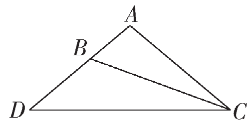
专题 7 特殊三角形的分类讨论

刷 难关

1. B 【解析】$\because \angle BAC=100°$，$\therefore \angle ABC+\angle ACB=180°-100°=80°$. $\because \angle ABC=3\angle ACB$，$\therefore \angle ABC=60°$，$\angle ACB=20°$. 如图(1)，当 D 在 BA 的延长线上时，$\because AD=AC$，$\therefore \angle ACD=\angle ADC$. $\because \angle ACD+\angle ADC=\angle BAC=100°$，$\therefore \angle ACD=50°$，$\therefore \angle BCD=\angle ACB+\angle ACD=70°$. 如图(2)，当 D 在 AB 的延长线上时，$\because AD=AC$，$\angle BAC=100°$，$\therefore \angle ADC=\angle ACD=\dfrac{1}{2}\times(180°-100°)=40°$，$\therefore \angle BCD=\angle ACD-\angle ACB=40°-20°=20°$，$\therefore \angle BCD$ 的度数是 $20°$ 或 $70°$. 故选 B.



图(1)

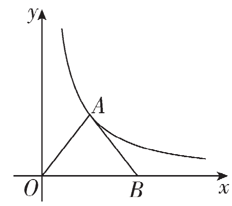


图(2)

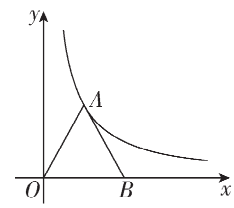
2. 7 或 4 【解析】当长为 7 cm 的边为腰时，底边长为 $18-7\times2=4$(cm)，此时 $4+7>7$，三边能构成三角形，符合题意；当长为 7 cm 的边为底边时，腰长为 $(18-7)\div2=5.5$(cm)，此时 $5.5+5.5>7$，三边能构成三角形，符合题意. 故答案为 7 或 4.

3. 7 或 8 【解析】$x^2-(k+2)x+2k=0$，$(x-k)(x-2)=0$，$x-k=0$ 或 $x-2=0$，解得 $x=k$ 或 $x=2$. $\because \triangle ABC$ 是等腰三角形，一边长为 3，另外两边长恰好是这个方程的两个根，$\therefore k=2$ 或 $k=3$. ①当 $k=2$ 时，$\triangle ABC$ 的三边长分别为 3，2，2，满足三角形的三边关系，则此时 $\triangle ABC$ 的周长为 $3+2+2=7$；②当 $k=3$ 时，$\triangle ABC$ 的三边长分别为 3，3，2，满足三角形的三边关系，则此时 $\triangle ABC$ 的周长为 $3+3+2=8$. 综上，$\triangle ABC$ 的周长为 7 或 8.

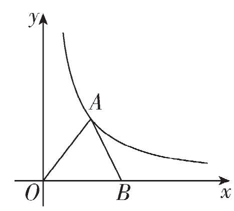
4. 10 或 $4\sqrt{5}$ 或 $2\sqrt{10}$ 【解析】如图(1)所示，当 $AO=AB$ 时，$AB=10$.



图(1)



图(2)



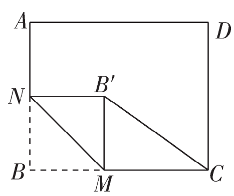
图(3)

如图(2)所示，当 $AB=OB$ 时，$AB=10$. 如图(3)所示，当 $OA=OB$ 时，$B(10,0)$. 设 $A\left(a,\dfrac{48}{a}\right)(a>0)$. 因为 $OA=10$，所以 $\sqrt{a^2+\left(\dfrac{48}{a}\right)^2}=10$，即 $a^4-100a^2+2\,304=0$，令 $a^2=b$，则 $b^2-100b+2\,304=0$，解得 $b=64$ 或 36，则 $a^2=64$ 或 36. 又因为 $a>0$，所以 $a=8$ 或 6，则点 A 的坐标为 $(8,6)$ 或 $(6,8)$. 当点 A 的坐标为 $(8,6)$ 时，$AB=\sqrt{(10-8)^2+(0-6)^2}=2\sqrt{10}$；当点 A 的坐标为 $(6,8)$ 时，$AB=\sqrt{(10-6)^2+(0-8)^2}=4\sqrt{5}$. 综上所述，$AB$ 的长为 10 或 $4\sqrt{5}$ 或 $2\sqrt{10}$. 故答案为 10 或 $4\sqrt{5}$ 或 $2\sqrt{10}$.

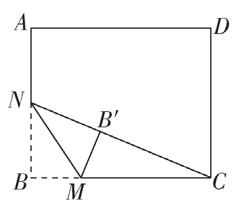
5. $\dfrac{5}{3}$ 或 6 【解析】在 $Rt\triangle ABC$ 中，$AB=3$，$BC=4$，由勾股定理得 $AC=5$. ①当点 P 在线段 AB 上时，如题图(1)所示. $\because \angle A+\angle APQ=90°$，$\angle A+\angle C=90°$，$\therefore \angle APQ=\angle C$. $\because \angle C$ 为锐角，$\therefore \angle APQ$ 为锐角，$\therefore \angle QPB$ 为钝角，$\therefore$ 当 $\triangle PQB$ 为等腰三角形时，$PQ=PB$. 在 $\triangle APQ$ 与 $\triangle ACB$ 中，$\because \angle APQ=\angle C$，$\angle A=\angle A$，$\therefore \triangle APQ\backsim\triangle ACB$，$\therefore \dfrac{PA}{AC}=\dfrac{PQ}{BC}$，即 $\dfrac{3-PB}{5}=\dfrac{PB}{4}$，解得 $PB=$

$\frac{4}{3}$，∴ $AP=AB-PB=3-\frac{4}{3}=\frac{5}{3}$. ②当点 P 在线段 AB 的延长线上时，如题图(2)所示. 当△PQB 为等腰三角形时，∠QBP 为钝角，∴ $BP=BQ$，∴ ∠BQP=∠P. ∵ ∠BQP+∠AQB=90°，∠A+∠P=90°，∴ ∠AQB=∠A，∴ $BQ=AB$，∴ $AB=BP$，∴ $AP=2AB=2\times3=6$. 综上所述，当△PQB 为等腰三角形时，AP 的长为$\frac{5}{3}$或 6.

6. $\frac{10}{3}$或 5　【解析】当∠$B'CM=90°$时，点 B'在 CD 所在的直线上. ∵ 点 N 是 AB 边上的中点，$AB=10$，∴ $AN=BN=B'N=\frac{1}{2}AB=5$. ∵ $NB'<AD$，∴ 点 B 的对应点 B'不可能落在 CD 所在的直线上，∴ 不存在此情况. 当∠$CMB'=90°$时，如图(1)所示. 由折叠性质可得，∠BMN=∠$B'MN=\frac{1}{2}$∠$BMB'=45°$，∴ ∠$BNM=90°-$∠$BMN=45°=$∠BMN，∴ $BM=BN=\frac{1}{2}AB=5$. 当∠$CB'M=90°$时，如图(2)所示. ∵ ∠$NB'M$=∠B=90°=∠$CB'M$，∴ ∠$NB'C=180°$，∴ B',N,C 三点共线. 由勾股定理可得，$NC=\sqrt{NB^2+BC^2}=\sqrt{5^2+12^2}=13$. 设 $BM=B'M=x$，则 $CM=12-x$，∴ $\frac{1}{2}\times(12-x)\times5=\frac{1}{2}\times13x$，解得 $x=\frac{10}{3}$，∴ $BM=\frac{10}{3}$. 综上所述，BM 的长为$\frac{10}{3}$或 5.



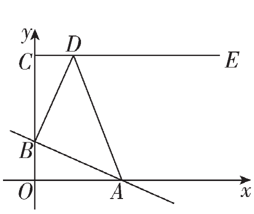
图(1)



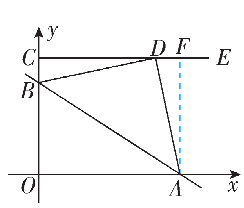
图(2)

7. $\frac{4}{3}$或$\frac{8}{3}$或 2　【解析】①当∠$ABD=90°$时，如图(1)，则 $BD=BA$，∠DBC+∠ABO=90°. 又∵ ∠ABO+∠BAO=90°，∴ ∠DBC=∠BAO.

由直线 $y=-\frac{1}{2}x+b$ 交线段 OC 于点 B，交 x 轴于点 A 易得 $OB=b$，$OA=2b$. ∵ 点 $C(0,4)$，∴ $OC=4$，∴ $BC=4-b$. 在△DBC 和△BAO 中，$\begin{cases}\angle DBC=\angle BAO,\\ \angle DCB=\angle BOA=90°,\\ BD=AB,\end{cases}$ ∴ △DBC≌△BAO(AAS)，∴ $BC=OA$，即 $4-b=2b$，∴ $b=\frac{4}{3}$.



图(1)

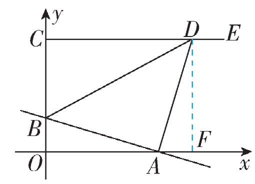


图(2)

②当∠$ADB=90°$时，如图(2)，作 $AF\perp CE$ 于 F，同理证得△BDC≌△DAF，∴ $CD=AF=4$，$BC=DF$. ∵ $OB=b$，$OA=2b$，∴ $BC=DF=2b-4$. ∵ $BC=4-b$，∴ $2b-4=4-b$，∴ $b=\frac{8}{3}$.

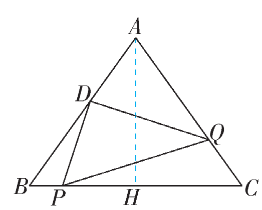
③当∠$DAB=90°$时，如图(3)，作 $DF\perp x$ 轴于 F，同理证得△AOB≌△DFA，∴ $OA=DF$，∴ $2b=4$，∴ $b=2$.

综上，b 的值为$\frac{4}{3}$或$\frac{8}{3}$或 2，故答案为$\frac{4}{3}$或$\frac{8}{3}$或 2.

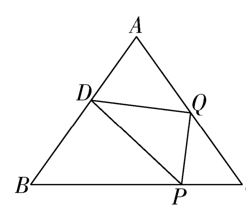


图(3)

8. 1 或$\frac{21}{5}$　【解析】如图(1)，当∠$PDQ=90°$时，作 $AH\perp BC$ 于点 H. ∵ $AB=AC=5$，$BC=6$，$AH\perp BC$，∴ $BH=CH=\frac{1}{2}BC=3$，∠B=∠C. ∵ ∠DPQ=∠ABC，∴ cos∠DPQ=cos∠$ABC=\frac{BH}{AB}=\frac{3}{5}=\frac{PD}{PQ}$. ∵ ∠$DPC$=∠$DPQ$+∠$QPC$=∠$PDB$+∠$B$，∠$B$=∠$DPQ$，∴ ∠$QPC$=∠$PDB$. ∵ ∠$B$=∠$C$，∴ △$DPB$∽△$PQC$，∴ $\frac{BD}{PC}=\frac{PD}{PQ}=\frac{3}{5}$. ∵ $BD=AB-AD=5-2=3$，∴ $PC=\frac{5}{3}BD=\frac{5}{3}\times3=5$，∴ $PB=BC-PC=6-5=1$.



图(1)

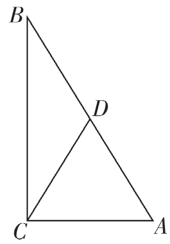


图(2)

如图(2)，当∠$DQP=90°$时，∵ cos∠$ABC=\frac{3}{5}$，∠DPQ=∠ABC，∴ cos∠DPQ=cos∠$ABC=\frac{3}{5}=\frac{PQ}{PD}$. ∵ ∠$DPC$=∠$DPQ$+∠$QPC$=∠$PDB$+∠$B$，∠$B$=∠$DPQ$，∴ ∠$QPC$=∠$PDB$. ∵ ∠$B$=∠$C$，∴ △$DPB$∽△$PQC$，∴ $\frac{BD}{PC}=\frac{PD}{PQ}=\frac{5}{3}$，∴ $PC=\frac{3}{5}BD=\frac{3}{5}\times3=\frac{9}{5}$，∴ $PB=BC-PC=6-\frac{9}{5}=\frac{21}{5}$. 综上所述，$PB$ 的长为 1 或$\frac{21}{5}$.

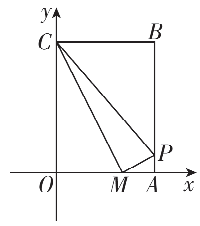
9. $\left(3\sqrt{5},\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$或$(3\sqrt{5},3\sqrt{5})$或$(3\sqrt{5},\sqrt{5})$　【解析】如图(1)，△ABC 是“智慧三角形”，CD 是中线，$CD=\frac{1}{2}AB$，∴ $BD=CD=AD$，∴ ∠B=∠BCD，∠A=∠ACD. 又∵ ∠A+∠B+∠BCD+

$\angle ACD=180°$，$\therefore\angle ACB=\angle BCD+\angle ACD=90°$，$\therefore$"智慧三角形"是直角三角形．$\because$ 矩形 $OABC$ 中，$OA=3\sqrt{5}$，$OC=4\sqrt{5}$，$OM=2AM$，$\therefore OM=2\sqrt{5}$，$AM=\sqrt{5}$，$BC=OA=3\sqrt{5}$，$AB=OC=4\sqrt{5}$，$\therefore MC=\sqrt{OM^2+OC^2}=10$．设点 $P(3\sqrt{5},a)$，则 $AP=a$，$BP=4\sqrt{5}-a$．



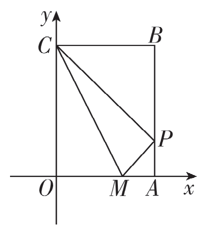
图(1)

①若 $\angle CMP=90°$，如图(2)所示．在 $Rt\triangle BCP$ 中，$CP^2=BP^2+CB^2=(4\sqrt{5}-a)^2+(3\sqrt{5})^2$，在 $Rt\triangle MPA$ 中，$MP^2=MA^2+AP^2=5+a^2$，在 $Rt\triangle MCP$ 中，$CM^2+MP^2=CP^2$，$\therefore 10^2+5+a^2=(4\sqrt{5}-a)^2+(3\sqrt{5})^2$，解得 $a=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$\therefore P\left(3\sqrt{5},\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$．



图(2)

②若 $\angle CPM=90°$，如图(3)所示．由①知，$CP^2=(4\sqrt{5}-a)^2+(3\sqrt{5})^2$，$MP^2=5+a^2$．在 $Rt\triangle CPM$ 中，$CP^2+MP^2=CM^2$，$\therefore(4\sqrt{5}-a)^2+(3\sqrt{5})^2+5+a^2=10^2$，整理得 $a^2-4\sqrt{5}a+15=0$，解得 $a=3\sqrt{5}$ 或 $a=\sqrt{5}$，$\therefore P(3\sqrt{5},3\sqrt{5})$ 或 $P(3\sqrt{5},\sqrt{5})$．综上，P 的坐标为 $\left(3\sqrt{5},\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ 或 $(3\sqrt{5},3\sqrt{5})$ 或 $(3\sqrt{5},\sqrt{5})$，故答案为 $\left(3\sqrt{5},\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ 或 $(3\sqrt{5},3\sqrt{5})$ 或 $(3\sqrt{5},\sqrt{5})$．



图(3)

考点21　全等三角形

刷基础

1. C　【解析】$\because\angle B=80°$，$\angle C=30°$，$\therefore\angle BAC=180°-\angle B-\angle C=70°$．$\because\triangle ABC\cong\triangle ADE$，$\therefore\angle DAE=\angle BAC=70°$，故选 C．

2. A　【解析】$\because PE\perp AC$，$PF\perp AB$，$\therefore\angle PEA=\angle PFA=90°$．$\because$ 点 P 到 AB，AC 的距离相等，$\therefore PE=PF$．又 $\because PA$ 是公共边，$\therefore\triangle PEA\cong\triangle PFA$，符合斜边直角边定理，即 HL．故选 A．

3. 30　【解析】由题意知，$\triangle ADF\cong\triangle BDG$，$\triangle AEF\cong\triangle CEH$，$\therefore DF=DG$，$EF=EH$，$AF=BG=3$，$\therefore GH=DG+DF+EF+EH=2DE=10$．$\because$ 长方形 $BCHG$ 是由 $\triangle ABC$ 分割后拼接成的，$\therefore S_{\triangle ABC}=S_{长方形BCHG}=BG\times GH=30$，故答案为 30．

4. 40°　【解析】根据题意可得 CD 平分 $\angle ACB$，$\therefore\angle ACF=\angle ECF$．$\because AE\perp CD$，$\therefore\angle AFC=\angle EFC=90°$．$\because CF=CF$，$\therefore\triangle ACF\cong\triangle ECF$(ASA)，$\therefore\angle AEC=\angle CAE$．$\because AE=BE$，$\angle B=35°$，$\therefore\angle BAE=\angle B=35°$，$\therefore\angle AEB=180°-\angle B-\angle BAE=110°$，$\therefore\angle AEC=70°$，$\therefore\angle ACB=180°-\angle AEC-\angle EAC=40°$，故答案为 40°．

5. (1)【解】$\because$ 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 60°，得到 $\triangle ADE$，$\therefore AB=AD$，$\angle BAD=60°$，$\therefore\triangle ABD$ 为等边三角形．

(2)【证明】$\because$ 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 60°，得到 $\triangle ADE$，$\therefore AE=AC$，$DE=BC$．$\because AC=BC$，$\therefore AE=DE$．$\because\triangle ABD$ 为等边三角形，$\therefore BA=BD$．在 $\triangle BED$ 和 $\triangle BEA$ 中，$\begin{cases}BE=BE,\\BD=BA,\\DE=AE,\end{cases}$ $\therefore\triangle BED\cong\triangle BEA$(SSS)，$\therefore\angle ABE=\angle DBE$，$\therefore BE$ 平分 $\angle ABD$．

6. (1)【证明】$\because O$ 是 AB 边的中点，$\therefore AO=BO$．$\because AE/\!/BD$，$\therefore\angle E=\angle BDO$，$\angle OAE=\angle OBD$．在 $\triangle OAE$ 与 $\triangle OBD$ 中，$\begin{cases}\angle E=\angle BDO,\\\angle OAE=\angle OBD,\\OA=OB,\end{cases}$ $\therefore\triangle OAE\cong\triangle OBD$(AAS)，$\therefore AE=BD$．

(2)【解】$\because O$ 是 AB 边的中点，$\angle ACB=90°$，$\therefore AO=BO=OC=\frac{1}{2}AB$，$\therefore\angle ACO=\angle CAO$．$\because BD=AE$，$\angle BDO=\angle E$，$\angle BDO=\angle CAO$，$\therefore\angle ACO=\angle CAO=\angle E$，$\therefore AC=AE=6$，$\therefore BD=AE=6$．

刷易错

7. A　【解析】A 选项，$AB=DE$，$BC=EF$，$\angle C=\angle F$，不符合全等三角形的判定定理，不能推出 $\triangle ABC\cong\triangle DEF$，故本选项符合题意；B 选项，$AB=DE$，$\angle B=\angle E$，$BC=EF$，符合全等三角形的判定定理 SAS，能推出 $\triangle ABC\cong\triangle DEF$，故本选项不符合题意；C 选项，$AB=DE$，$AC=DF$，$BC=EF$，符合全等三角形的判定定理 SSS，能推出 $\triangle ABC\cong\triangle DEF$，故本选项不符合题意；D 选项，$AB=DE$，$BC=EF$，$\angle BAC=\angle EDF=90°$，符合两直角三角形全等的判定定理 HL，能推出 $\triangle ABC\cong\triangle DEF$，故本选项不符合题意．故选 A．

易错警示

运用全等三角形的判定方法时，不要误用"SSA"判定两个三角形全等．

刷提升

1. D　【解析】连接 FC．$\because Rt\triangle ABC\cong Rt\triangle CDE$，$\therefore AB=CD=1$，$BC=DE=2$，$AC=CE$，$\angle ACB=\angle CED$，$\therefore BD=3$．$\because\angle ABC=\angle CDE=90°$，$\therefore\angle ACB+\angle ECD=\angle DEC+\angle ECD=90°$，$\therefore\angle ACE=90°$．又 $\because F$ 是 AE 的中点，$AC=CE$，$\therefore\angle AFC=90°=\angle ABC$，$CF=AF$，$\therefore\angle FAB+\angle FCB=360°-90°-90°=180°=\angle FCD+\angle FCB$，$\therefore\angle FAB=\angle FCD$．又 $\because AF=CF$，$AB=CD$，$\therefore\triangle BAF\cong\triangle DCF$，$\therefore BF=FD$，$\angle AFB=\angle CFD$，$\therefore\angle AFC=\angle BFD=90°$，$\therefore\angle FBD=45°$，$\therefore BF=BD\times\cos\angle FBD=3\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，故选 D．

2.【解】(1) 延长 AD 至 E，使 $DE=AD$，连接 BE，如图(1)．

$\because AD$ 是 BC 边上的中线，$\therefore BD=CD$．

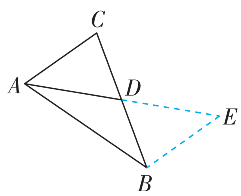
在$\triangle BDE$和$\triangle CDA$中，$\begin{cases}BD=CD,\\ \angle BDE=\angle CDA,\\ DE=AD,\end{cases}$

$\therefore\ \triangle BDE\cong\triangle CDA(\text{SAS})$，$\therefore\ BE=AC=6$.

在$\triangle ABE$中，由三角形的三边关系得$AB-BE<AE<AB+BE$，

$\therefore\ 10-6<AE<10+6$，即$4<AE<16$，$\therefore\ 2<AD<8$，

故答案为$2<AD<8$.



图(1)

(2)$BE+DF=EF$. 证明如下：延长AB至点N，使$BN=DF$，连接CN，如图(2).

$\because\ \angle ABC+\angle D=180°$，$\angle NBC+\angle ABC=180°$，$\therefore\ \angle NBC=\angle D$.

在$\triangle NBC$和$\triangle FDC$中，$\begin{cases}BN=DF,\\ \angle NBC=\angle D,\\ BC=DC,\end{cases}$

$\therefore\ \triangle NBC\cong\triangle FDC(\text{SAS})$，$\therefore\ CN=CF$，$\angle NCB=\angle FCD$.

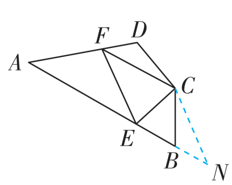
$\because\ \angle BCD=140°$，$\angle ECF=70°$，$\therefore\ \angle BCE+\angle FCD=70°$，

$\therefore\ \angle BCE+\angle NCB=\angle ECN=70°=\angle ECF$.

在$\triangle NCE$和$\triangle FCE$中，$\begin{cases}CN=CF,\\ \angle ECN=\angle ECF,\\ CE=CE,\end{cases}$

$\therefore\ \triangle NCE\cong\triangle FCE(\text{SAS})$，$\therefore\ EN=EF$.

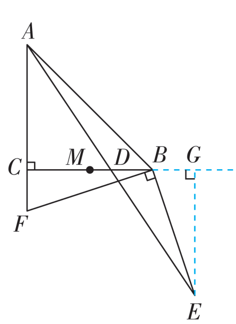
$\because\ BE+BN=EN$，$\therefore\ BE+DF=EF$.



图(2)

刷 素养

3.【解】(1)$CD=BD+CF$. 证明如下：如图(1)，过点E作$EG\perp CB$交CB的延长线于G，则$\angle ACD=\angle EGD=90°$.



图(1)

在$\triangle ACD$和$\triangle EGD$中，$\begin{cases}\angle ACD=\angle EGD,\\ \angle ADC=\angle EDG,\\ AD=ED,\end{cases}$

$\therefore\ \triangle ACD\cong\triangle EGD(\text{AAS})$，$\therefore\ CD=DG$，$AC=EG$. $\because\ \triangle ABC$是等腰三角形，$\angle ACB=90°$，$\therefore\ AC=BC$，$\therefore\ EG=BC$. $\because\ BF\perp BE$，

$\therefore\ \angle EBF=90°$，$\therefore\ \angle CBF+\angle EBG=90°$.

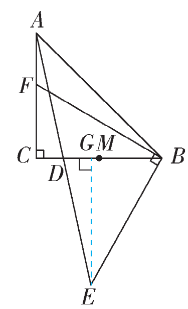
又$\because\ \angle BEG+\angle EBG=90°$，$\therefore\ \angle BEG=\angle CBF$.

在$\triangle CBF$和$\triangle GEB$中，$\begin{cases}\angle FCB=\angle BGE=90°,\\ BC=EG,\\ \angle CBF=\angle GEB,\end{cases}$

$\therefore\ \triangle CBF\cong\triangle GEB(\text{ASA})$，$\therefore\ CF=BG$，$\therefore\ CD=DG=BD+BG=BD+CF$.

(2)题图(2)：$DB=CD+CF$；题图(3)：$CF=BD+CD$.

如图(2)，作$EG\perp CB$于G，则$\angle ACD=\angle EGD=90°$.



图(2)

在$\triangle ACD$和$\triangle EGD$中，$\begin{cases}\angle ACD=\angle EGD,\\ \angle ADC=\angle EDG,\\ AD=ED,\end{cases}$

$\therefore\ \triangle ACD\cong\triangle EGD(\text{AAS})$，$\therefore\ CD=DG$，$AC=EG$. $\because\ AC=BC$，$\therefore\ EG=BC$. $\because\ BF\perp BE$，$\therefore\ \angle EBF=90°$，$\therefore\ \angle CBF+\angle EBG=90°$. $\because\ \angle BEG+\angle EBG=90°$，$\therefore\ \angle BEG=\angle CBF$.

在$\triangle CBF$和$\triangle GEB$中，$\begin{cases}\angle FCB=\angle BGE=90°,\\ BC=EG,\\ \angle CBF=\angle GEB,\end{cases}$

$\therefore\ \triangle CBF\cong\triangle GEB(\text{ASA})$，$\therefore\ CF=BG$，$\therefore\ CD=DG=BD-BG=BD-CF$，即$DB=CD+CF$.

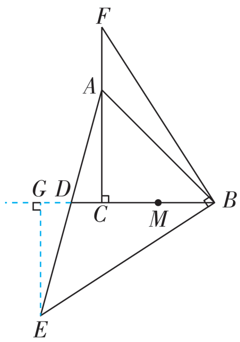
如图(3)，作$EG\perp BC$交BC的延长线于G，则$\angle ACD=\angle EGD=90°$.

在$\triangle ACD$和$\triangle EGD$中，$\begin{cases}\angle ACD=\angle EGD,\\ \angle ADC=\angle EDG,\\ AD=ED,\end{cases}$

$\therefore\ \triangle ACD\cong\triangle EGD(\text{AAS})$，$\therefore\ CD=DG$，$AC=EG$. $\because\ AC=BC$，$\therefore\ EG=BC$. $\because\ BF\perp BE$，$\therefore\ \angle EBF=90°$，$\therefore\ \angle CBF+\angle EBG=90°$. $\because\ \angle BEG+\angle EBG=90°$，$\therefore\ \angle BEG=\angle CBF$.

在$\triangle CBF$和$\triangle GEB$中，$\begin{cases}\angle FCB=\angle BGE=90°,\\ BC=EG,\\ \angle CBF=\angle GEB,\end{cases}$

$\therefore \triangle CBF \cong \triangle GEB$(ASA),$\therefore CF=BG$,$\therefore CF=BG=BD+DG=BD+CD$.



图(3)

专题8 全等三角形常考模型(方法)

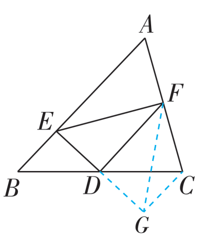
刷难关

1. (1)【证明】如图(1),延长 ED 到点 G,使得 $ED=DG$,连接 GF,GC. $\because DF\perp DE,ED=DG,\therefore EF=FG$.

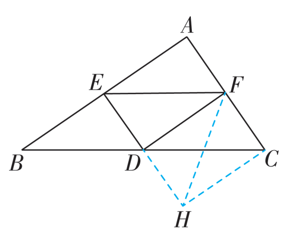
$\because D$ 是 BC 的中点,$\therefore BD=CD$.

又$\because \angle BDE=\angle GDC$,$\therefore \triangle DBE\cong\triangle DCG$(SAS),$\therefore BE=CG$.

在$\triangle CFG$ 中,$\because CG+CF>GF$,$\therefore BE+CF>EF$.



图(1)



图(2)

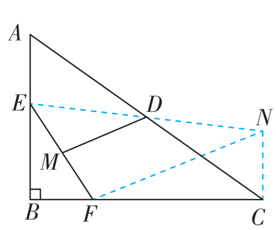
【解】(2)如图(2),延长 ED 到点 H,使得 $ED=DH$,连接 HF,HC. $\because \angle A=90^\circ$,$\therefore \angle B+\angle ACB=90^\circ$.

由(1)可知$\triangle DBE\cong\triangle DCH,EF=FH$,

$\therefore BE=CH,\angle B=\angle BCH$,$\therefore \angle HCA=\angle BCH+\angle ACB=90^\circ$.

在 $Rt\triangle CFH$ 中,$\because HC^2+CF^2=HF^2$,$\therefore BE^2+CF^2=EF^2$,故答案为 $BE^2+CF^2=EF^2$.

(3)如图(3),连接 ED 并延长到点 N,使得 $ED=DN$,连接 NF,NC.



图(3)

$\because \angle B=90^\circ$,$\therefore \angle A+\angle ACB=90^\circ$.

同(1)可知$\triangle DAE\cong\triangle DCN$(SAS),

$\therefore AE=CN=2,\angle A=\angle ACN$,$\therefore \angle NCB=\angle BCA+\angle ACN=90^\circ$.

在 $Rt\triangle CFN$ 中,$NF=\sqrt{NC^2+CF^2}=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}$.

$\because M,D$ 分别是 EF,EN 的中点,$\therefore DM$ 是$\triangle EFN$ 的中位线,

$\therefore DM=\frac{1}{2}FN=\frac{\sqrt{29}}{2}$,故答案为$\frac{\sqrt{29}}{2}$.

2.【解】(1)$AB=AC+CD$. 理由如下:

$\because$ 在$\triangle ABC$ 中,$\angle C=2\angle B$,$\angle C=90^\circ$,AD 为$\angle BAC$ 的平分线,$\therefore \angle B=45^\circ,\angle EAD=\angle CAD$.

在$\triangle EAD$ 和$\triangle CAD$ 中,$\begin{cases}AE=AC,\\ \angle EAD=\angle CAD,\\ AD=AD,\end{cases}$

$\therefore \triangle EAD\cong\triangle CAD$(SAS),$\therefore ED=CD,\angle AED=\angle C=90^\circ$,

$\therefore \angle BED=90^\circ$.

又$\because \angle B=45^\circ$,$\therefore \angle EDB=\angle B=45^\circ$,$\therefore ED=EB$,$\therefore EB=CD$,

$\therefore AB=AE+EB=AC+CD$.

(2)$AB=AC+CD$. 理由如下:

如图(1),在 AB 上截取 $AF=AC$,连接 FD.

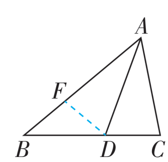
$\because$ 在$\triangle ABC$ 中,AD 为$\angle BAC$ 的平分线,$\therefore \angle FAD=\angle CAD$.

在$\triangle FAD$ 和$\triangle CAD$ 中,$\begin{cases}AF=AC,\\ \angle FAD=\angle CAD,\\ AD=AD,\end{cases}$

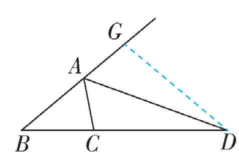
$\therefore \triangle FAD\cong\triangle CAD$(SAS),$\therefore FD=CD,\angle AFD=\angle ACB$.

$\because \angle AFD=\angle B+\angle FDB,\angle ACB=2\angle B$,$\therefore \angle B+\angle FDB=\angle ACB=2\angle B$,$\therefore \angle FDB=\angle B$,$\therefore FD=FB$,$\therefore FB=CD$,

$\therefore AB=AF+FB=AC+CD$.



图(1)



图(2)

(3)不成立,新数量关系为 $CD=AB+AC$.

如图(2),在 BA 的延长线上取一点 G,使 $AG=AC$,连接 DG.

$\because AD$ 是$\angle CAG$ 的平分线,$\therefore \angle GAD=\angle CAD$.

在$\triangle GAD$ 和$\triangle CAD$ 中,$\begin{cases}AG=AC,\\ \angle GAD=\angle CAD,\\ AD=AD,\end{cases}$

$\therefore \triangle GAD\cong\triangle CAD$(SAS),$\therefore GD=CD,\angle AGD=\angle ACD$.

$\because \angle AGD=180^\circ-\angle B-\angle GDB,\angle ACD=180^\circ-\angle ACB$,

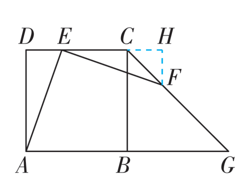
$\therefore 180^\circ-\angle B-\angle GDB=180^\circ-\angle ACB$,$\therefore \angle B+\angle GDB=\angle ACB$.

$\because \angle ACB=2\angle B$,$\therefore \angle B+\angle GDB=2\angle B$,$\therefore \angle GDB=\angle B$,

$\therefore GD=GB=AB+AG=AB+AC$,$\therefore CD=AB+AC$.

3. A 【解析】如图,过点 F 作 $FH\perp DC$ 交 DC 延长线于点 H,$\therefore \angle H=90^\circ$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,$\therefore AB/\!/CD,\angle D=\angle ABC=90^\circ,AD=DC$. $\because$ 把



AE 绕点 E 逆时针旋转 $90°$，得到 FE，$\therefore AE=FE$，$\angle AEF=90°$. $\because \angle D=\angle AEF=90°$，$\therefore \angle DAE+\angle AED=90°$，$\angle HEF+\angle AED=90°$，$\therefore \angle DAE=\angle HEF$. 在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle EHF$ 中，$\begin{cases}\angle D=\angle H=90°,\\ \angle DAE=\angle HEF,\\ AE=EF,\end{cases}$

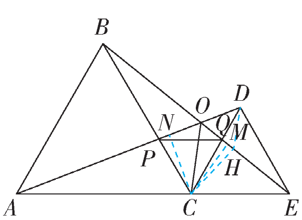
$\therefore \triangle ADE\cong\triangle EHF(\text{AAS})$，$\therefore AD=EH$，$DE=HF$，$\therefore EH=DC$，$\therefore DE=CH=HF$，$\therefore \angle HCF=45°$，$\therefore \angle G=45°$，$\therefore \triangle CBG$ 为等腰直角三角形. 设 $CH=HF=DE=x$，正方形的边长为 y，则 $CE=y-x$，$CF=\sqrt{2}x$，$CG=\sqrt{2}y$，$\therefore FG=CG-CF=\sqrt{2}y-\sqrt{2}x=\sqrt{2}(y-x)$，$\therefore \dfrac{FG}{CE}=\dfrac{\sqrt{2}(y-x)}{y-x}=\sqrt{2}$，故选 A.

4. ①②③④　【解析】$\because \triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 为等边三角形，$\therefore AC=BC$，$CD=CE=DE$，$\angle ACB=\angle DCE=\angle CDE=60°$，$\therefore \angle ACB+\angle BCD=\angle DCE+\angle BCD$，即 $\angle ACD=\angle BCE$. 在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCE$ 中，$\begin{cases}AC=BC,\\ \angle ACD=\angle BCE,\\ DC=EC,\end{cases}$ $\therefore \triangle ACD\cong\triangle BCE(\text{SAS})$，

$\therefore \angle CDA=\angle CEB$，$\angle CAD=\angle CBE$. 又 $\because \angle BPO=\angle APC$，$\therefore \angle AOB=\angle ACB=60°$，故①正确. $\because \angle ACB=\angle DCE=60°$，$\angle ACB+\angle BCD+\angle DCE=180°$，$\therefore \angle BCD=60°$，$\therefore \angle PCD=\angle QCE$.

在 $\triangle CDP$ 和 $\triangle CEQ$ 中，$\begin{cases}\angle PDC=\angle QEC,\\ DC=EC,\\ \angle PCD=\angle QCE,\end{cases}$

$\therefore \triangle CDP\cong\triangle CEQ(\text{ASA})$，$\therefore CP=CQ$. 又 $\because \angle PCQ=60°$，$\therefore \triangle PCQ$ 为等边三角形，$\therefore \angle PQC=\angle DCE=60°$，$\therefore PQ/\!/AE$，故②正确. 过 C 作 $CM\perp BE$ 于 M，$CN\perp AD$ 于 N，如图.



$\because \triangle BCE\cong\triangle ACD$，$\therefore S_{\triangle BCE}=S_{\triangle ACD}$，$BE=AD$，$\therefore \dfrac{1}{2}\times BE\times CM=\dfrac{1}{2}\times AD\times CN$，$\therefore CM=CN$. 又 $\because CM\perp BE$，$CN\perp AD$，$\therefore OC$ 平分 $\angle AOE$，故③正确. 在 OE 上截取 $EH=OC$，连接 DH，如图. $\because \angle CAO=\angle CBO$，$\angle CBO+\angle CEO=\angle ACB=60°$，$\therefore \angle CAO+\angle CEO=60°$，$\therefore \angle AOE=120°$. $\because OC$ 平分 $\angle AOE$，$\therefore \angle EOC=60°=\angle CDE$. 又 $\because \angle CQO=\angle EQD$，$\therefore \angle OCD=\angle HED$.

在 $\triangle OCD$ 和 $\triangle HED$ 中，$\begin{cases}OC=EH,\\ \angle OCD=\angle HED,\\ CD=ED,\end{cases}$

$\therefore \triangle OCD\cong\triangle HED(\text{SAS})$，$\therefore OD=HD$. $\because \angle DOH=180°-\angle AOE=60°$，$\therefore \triangle DHO$ 是等边三角形，$\therefore OH=OD$. $\because OE=EH+OH$，$\therefore OE=OC+OD$，故④正确. 故答案为①②③④.

5.【解】(1) $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle BAC=60°$，$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形，$\therefore \angle BAC=\angle B=\angle BCA=60°$.

由旋转得 $AD=AP$，$\angle DAP=60°$，$\therefore \angle BAC=\angle DAP=60°$，

$\therefore \angle BAC-\angle DAC=\angle DAP-\angle DAC$，即 $\angle BAD=\angle CAP$.

在 $\triangle BAD$ 和 $\triangle CAP$ 中，$\begin{cases}AB=AC,\\ \angle BAD=\angle CAP,\\ AD=AP,\end{cases}$

$\therefore \triangle BAD\cong\triangle CAP(\text{SAS})$，$\therefore \angle ACP=\angle B=60°$，$BD=CP$，

$\therefore AC=BC=BD+CD=PC+CD$. 故答案为 $60°$，$AC=CD+CP$.

(2) 由旋转得 $\angle DAP=90°$，$AD=AP$.

$\because \angle BAC=90°$，$AB=AC$，$\therefore \angle B=\angle ACB=45°$.

同理(1)可得 $\triangle BAD\cong\triangle CAP$，$\therefore BD=CP$，$\angle ACP=\angle B=45°$，

$\therefore \angle DCP=90°$，$\therefore CP^2+CD^2=PD^2$，$\therefore BD^2+CD^2=PD^2$.

$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ADP$ 中，$PD^2=AD^2+AP^2=2AD^2$，

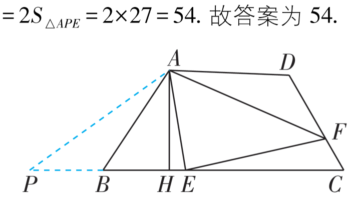
$\therefore BD^2+CD^2=2AD^2$.

6. B　【解析】由旋转得 $\angle FAD=90°$，$AF=AD$，$BF=DC$，$\angle ABF=\angle C$. $\because \angle DAE=45°$，$\therefore \angle FAE=\angle FAD-\angle DAE=45°$，$\therefore \angle FAE=\angle DAE$. 又 $\because AE=AE$，$AF=AD$，$\therefore \triangle FAE\cong\triangle DAE(\text{SAS})$，$\therefore EF=DE$. $\because \angle BAC=90°$，$\therefore \angle ABC+\angle C=90°$，$\therefore \angle ABF+\angle ABC=90°$，$\therefore \angle FBE=90°$. 在 $\text{Rt}\triangle BFE$ 中，$BF^2+BE^2=EF^2$，$\therefore CD^2+BE^2=DE^2$. $\therefore$ 一定正确的是①②④，故选 B.

7. 54　【解析】在 CB 的延长线上取一点 P，使 $BP=DF$，连接 AP，如图所示. $\because \angle BAD=2\alpha$，$\angle C=180°-2\alpha$，$\therefore \angle BAD+\angle C=180°$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 的内角和为 $360°$，$\therefore \angle ABC+\angle D=180°$. 又 $\because \angle ABC+\angle ABP=180°$，$\therefore \angle ABP=\angle D$. 在 $\triangle ABP$ 和 $\triangle ADF$ 中，$\begin{cases}AB=AD,\\ \angle ABP=\angle D,\\ BP=DF,\end{cases}$ $\therefore \triangle ABP\cong\triangle ADF(\text{SAS})$，$\therefore S_{\triangle ABP}=S_{\triangle ADF}$，$\angle BAP=\angle DAF$，$AP=AF$. $\because \angle BAE+\angle DAF+\angle EAF=\angle BAD=2\alpha$，$\angle EAF=\alpha$，$\therefore \angle BAE+\angle DAF=\alpha$，$\therefore \angle BAE+\angle BAP=\alpha$，即 $\angle EAP=\alpha$，$\therefore \angle EAP=\angle EAF=\alpha$. 在 $\triangle AEP$ 和 $\triangle AEF$ 中，$\begin{cases}AP=AF,\\ \angle EAP=\angle EAF,\\ AE=AE,\end{cases}$ $\therefore \triangle AEP\cong\triangle AEF(\text{SAS})$，

$\therefore S_{\triangle AEP}=S_{\triangle AEF}$，$\therefore S_{\text{五边形}ABEFD}=S_{\triangle ABE}+S_{\triangle ADF}+S_{\triangle AEF}=S_{\triangle ABE}+S_{\triangle ABP}+S_{\triangle APE}=2S_{\triangle APE}$. $\because BE+DF=9$，$\therefore EP=BE+BP=BE+DF=9$. $\because AH\perp BC$，$AH=6$，$\therefore S_{\triangle APE}=\dfrac{1}{2}EP\cdot AH=\dfrac{1}{2}\times 9\times 6=27$，

$\therefore S_{\text{五边形}ABEFD}=2S_{\triangle APE}=2\times 27=54$. 故答案为 54.



考点 22　相似

刷基础

1. C 【解析】A 选项,因为$\frac{x}{y}=\frac{5}{3}$,所以 $3x=5y$,故 A 不符合题意;B 选项,因为$\frac{x}{5}=\frac{3}{y}$,所以 $xy=15$,故 B 不符合题意;C 选项,因为$\frac{x}{3}=\frac{y}{5}$,所以 $3y=5x$,故 C 符合题意;D 选项,因为$\frac{3}{5}=\frac{y}{x}$,所以 $3x=5y$,故 D 不符合题意. 故选 C.

2. B 【解析】A 选项,$2\times3\neq1\times4$,故本选项不符合题意;B 选项,$2\times3=1\times6$,故本选项符合题意;C 选项,$2\times8\neq4\times6$,故本选项不符合题意;D 选项,$4\times5\neq3\times10$,故本选项不符合题意. 故选 B.

3. $(\sqrt{5}-1)$ 【解析】$\because$ 习字格为正方形,$\therefore MN/\!/PQ$,$\angle N=90°$. $\because AB/\!/PN$,$\therefore$ 四边形 $ANPB$ 为矩形,$\therefore AB=NP=2$ cm. $\because \frac{BC}{AB}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,$\therefore BC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}AB=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\times2=(\sqrt{5}-1)$ cm. 故答案为 $(\sqrt{5}-1)$.

4. C 【解析】$\because AB/\!/CD/\!/EF$,$\therefore \frac{BC}{CE}=\frac{AD}{DF}=\frac{3}{2}$. $\because CE=4$,$\therefore BC=6$,$\therefore BE=BC+CE=6+4=10$. 故选 C.

5. C 【解析】①$AC^2=AD\cdot AB$,即$\frac{AC}{AD}=\frac{AB}{AC}$,再加上$\angle A$ 为公共角,可以根据两边成比例且夹角相等的两个三角形相似来判定;②$\angle ADC=\angle ACB$,再加上$\angle A$ 为公共角,可以根据两角分别相等的两个三角形相似来判定;③$\angle A$ 不是已知的比例线段的夹角,无法单独判定两三角形相似;④$\angle B=\angle ACD$,再加上$\angle A$ 为公共角,可以根据两角分别相等的两个三角形相似来判定. 故有 3 个条件能够单独判定$\triangle ABC$ 相似于$\triangle ACD$. 故选 C.

6. D 【解析】A 选项,$\because \angle C=\angle C$,$\angle DEC=\angle B=60°$,$\therefore \triangle DEC\backsim\triangle ABC$,故 A 不符合题意. B 选项,$\because \angle C=\angle C$,$\angle CDE=\angle B$,$\therefore \triangle CDE\backsim\triangle CBA$,故 B 不符合题意. C 选项,$\because BE=AB-AE=6-2=4$,$BD=BC-CD=8-5=3$,$\therefore \frac{BE}{BC}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$,$\frac{BD}{AB}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$,$\therefore \frac{BE}{BC}=\frac{BD}{BA}$. $\because \angle B=\angle B$,$\therefore \triangle BDE\backsim\triangle BAC$,故 C 不符合题意. D 选项,由已知条件无法证明$\triangle ADE$ 与$\triangle ABC$ 相似,故 D 符合题意. 故选 D.

7. D 【解析】A 选项,$\because DE$ 是$\triangle ABC$ 的中位线,$\therefore DE/\!/BC$,结论正确,不符合题意;B 选项,$\because DE$ 是$\triangle ABC$ 的中位线,$\therefore DE/\!/BC$,$\therefore$ 易得$\triangle DEG\backsim\triangle CBG$,结论正确,不符合题意;C 选项,$\because DE$ 是$\triangle ABC$ 的中位线,$\therefore DE/\!/BC$,$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle ADE$,结论正确,不符合题意;D 选项,$\because DE$ 是$\triangle ABC$ 的中位线,$\therefore DE/\!/BC$,$\frac{DE}{BC}=\frac{1}{2}$,$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle ADE$,$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$,$\therefore S_{\triangle ADE}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$,结论错误,符合题意. 故选 D.

8. 9 【解析】$\because \triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$,$\frac{AB}{A'B'}=\frac{2}{3}$,$\therefore \frac{\triangle ABC\text{的周长}}{\triangle A'B'C'\text{的周长}}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{2}{3}$. $\because \triangle ABC$ 的周长为 6 cm,$\therefore \triangle A'B'C'$ 的周长为 9 cm,故答案为 9.

9. 【证明】$\because AP=5$,$CP=3$,$BP=10$,$DP=6$,$\therefore \frac{AP}{BP}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$,$\frac{CP}{DP}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$,$\therefore \frac{AP}{BP}=\frac{CP}{DP}$. 又$\because \angle APC=\angle BPD$,$\therefore \triangle APC\backsim\triangle BPD$.

10. (1)【证明】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,$\therefore AD=CD$,$\angle ADE=\angle CDE$. $\because DE=DE$,$\therefore \triangle ADE\cong\triangle CDE(\text{SAS})$,$\therefore \angle DCE=\angle DAE$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,$\therefore AD/\!/BF$,$\therefore \angle F=\angle DAE$,$\therefore \angle F=\angle DCE$. $\because \angle GEC=\angle CEF$,$\therefore \triangle EGC\backsim\triangle ECF$.

(2)【解】$\because AD/\!/BF$,$\therefore$ 易得$\triangle ADG\backsim\triangle FCG$,$\therefore \frac{AD}{FC}=\frac{DG}{CG}=\frac{2}{3}$. 设 $DG=2k$,则 $CG=3k$,$\therefore CD=AD=5k$,$\therefore FC=\frac{15}{2}k$. $\because \triangle ADE\cong\triangle CDE$,$\therefore AE=CE$. $\because \triangle EGC\backsim\triangle ECF$,$\therefore \frac{EG}{EC}=\frac{CG}{FC}$,$\therefore \frac{EG}{AE}=\frac{CG}{FC}=\frac{3k}{\frac{15}{2}k}=\frac{2}{5}$.

11. A 【解析】$\because \triangle ABC$ 与$\triangle DEF$ 位似,位似中心为 O,且$\triangle ABC$ 的面积与$\triangle DEF$ 的面积之比为 $25:16$,$\therefore \left(\frac{OB}{OE}\right)^2=\frac{25}{16}$,则$\frac{OB}{OE}=\frac{5}{4}$,$\therefore OE:BE=4:9$,故选 A.

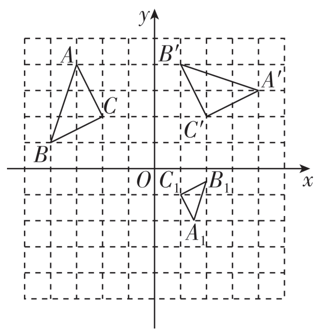
12. B 【解析】$\because B(-9,-3)$,以原点 O 为位似中心,把$\triangle ABO$ 缩小为原图形的$\frac{1}{3}$,$\therefore$ 点 B 的对应点 B'的坐标是$\left(-9\times\frac{1}{3},-3\times\frac{1}{3}\right)$或$\left(-9\times\left(-\frac{1}{3}\right),-3\times\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$,即$(-3,-1)$或$(3,1)$,故选 B.

13. B 【解析】A 选项,$\because$ 位似图形对应点连线所在的直线经过位似中心,$\therefore$ 直线 AD 一定经过点 O,故 A 正确,不符合题意. B 选项,$\because \triangle ABC$ 与$\triangle DEF$ 是位似图形,$\therefore \angle EDF=\angle BAC$,故 B 错误,符合题意. C 选项,$\because \triangle ABC$ 与$\triangle DEF$ 是位似图形,$DE=2AB$,$\therefore OE=2OB$,即 B 为 OE 的中点,故 C 正确,不符合题意. D 选项,$\because DE=2AB$,$\therefore \frac{OE}{OB}=\frac{OF}{OC}=\frac{DE}{AB}=2$. 又$\because \angle BOC=\angle EOF$,$\therefore \triangle BOC\backsim\triangle EOF$,$\therefore \frac{S_{\triangle OEF}}{S_{\triangle OBC}}=2^2=4$,则

$S_{\triangle OEF}=4S_{\triangle OBC}$，$\therefore S_{四边形BCFE}=3S_{\triangle OBC}$，故 D 正确，不符合题意.

故选 B.

14.【解】(1) 如图，$\triangle A'B'C'$即为所求. 点 B'的坐标为 $(1,4)$.



(2) 如图，$\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求.

刷 易错

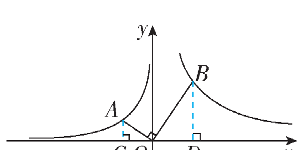
15. $(2,1)$ 或 $(-2,-1)$　【解析】$\because$ 以原点 O 为位似中心，把线段 AB 缩小为原来的 $\frac{1}{3}$，$\therefore$ 点 A 的对应点 A' 的坐标是 $\left(6\times\frac{1}{3},3\times\frac{1}{3}\right)$ 或 $\left(6\times\left(-\frac{1}{3}\right),3\times\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$，即 $(2,1)$ 或 $(-2,-1)$.

> **易错警示**
>
> **位似中的分类讨论**
>
> 注意分在原点同侧和异侧两种情况进行讨论.

刷 提升

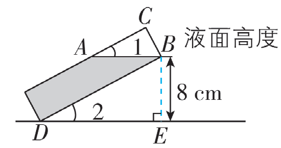
1. D　【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore AD/\!/BC$，$\therefore$ 易得 $\triangle EBC\backsim\triangle EDF$，$\therefore \frac{EF}{EC}=\frac{DE}{EB}=\frac{1}{3}$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore CD/\!/BG$，$CD=AB$，$\therefore$ 易得 $\triangle EDC\backsim\triangle EBG$，$\therefore \frac{CD}{BG}=\frac{DE}{EB}=\frac{1}{3}$，$\therefore \frac{CD}{AB+AG}=\frac{1}{3}$，$\therefore \frac{CD}{AG}=\frac{1}{2}$，故 A 正确，不符合题意. $\because CD=AB$，$\therefore \frac{AB}{AG}=\frac{1}{2}$，故 B 正确，不符合题意. 根据题意得，$\frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle CBE}}=\frac{DE}{EB}=\frac{1}{3}$，故 C 正确，不符合题意. $\because CD/\!/BG$，$\therefore$ 易得 $\triangle GAF\backsim\triangle CDF$，$\therefore \frac{S_{\triangle GAF}}{S_{\triangle CDF}}=\left(\frac{AG}{CD}\right)^2=2^2=4$，故 D 错误，符合题意. 故选 D.

2. A　【解析】过 A 作 $AC\perp x$ 轴于 C，过 B 作 $BD\perp x$ 轴于 D，如图所示，$\therefore S_{\triangle ACO}=\frac{1}{2}\times|-1|=\frac{1}{2}$，$S_{\triangle BDO}=\frac{1}{2}\times|4|=2$，$\angle ACO=\angle ODB=90°$. $\because OA\perp OB$，$\therefore \angle AOC=\angle OBD=90°-\angle BOD$，$\therefore \triangle AOC\backsim\triangle OBD$，



$\therefore \frac{S_{\triangle ACO}}{S_{\triangle BDO}}=\left(\frac{OA}{OB}\right)^2$，即 $\frac{\frac{1}{2}}{2}=\left(\frac{OA}{OB}\right)^2$，$\therefore \frac{OA}{OB}=\frac{1}{2}$(负值已舍去)，故选 A.

3. 53　【解析】如图，过点 B 作 $BE\perp DE$ 于 E. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BDE$ 中，$BD=17\ \mathrm{cm}$，$BE=8\ \mathrm{cm}$，则 $DE=\sqrt{BD^2-BE^2}=15\ \mathrm{cm}$. $\because AB/\!/DE$，$AC/\!/BD$，$\therefore \angle 1=\angle DBA=\angle 2$. $\because \angle C=\angle BED=90°$，$\therefore \triangle CAB\backsim\triangle EDB$，$\therefore \frac{AC}{BC}=\frac{DE}{BE}$，即 $\frac{AC}{4}=\frac{15}{8}$，则 $AC=7.5\ \mathrm{cm}$，



$\therefore$ 阴影部分的面积为 $17\times4-\frac{1}{2}\times4\times7.5=53(\mathrm{cm}^2)$. 故答案为 53.

4.【解】(1) 选择条件①能使 $\triangle ABD\backsim\triangle DCE$. 证明：$\because AB=AC$，$\therefore \angle B=\angle C$.

$\because \angle ADC=\angle B+\angle BAD$，$\angle ADC=\angle ADE+\angle CDE$，$\angle ADE=\angle B$，$\therefore \angle BAD=\angle CDE$，$\therefore \triangle ABD\backsim\triangle DCE$.

选择条件②不能证明 $\triangle ABD\backsim\triangle DCE$.

选择条件③能使 $\triangle ABD\backsim\triangle DCE$. 证明：$\because AB=AC$，$\therefore \angle B=\angle C$.

又 $\because AB\cdot CE=BD\cdot CD$，$\therefore \frac{AB}{DC}=\frac{BD}{CE}$，$\therefore \triangle ABD\backsim\triangle DCE$.

(任选①和③中的一个进行证明即可)

(2) $\because AB=AC$，$AB=10$，$\therefore AC=10$. 又 $\because AE=8$，$\therefore CE=2$.

由(1)可得，$\frac{AB}{CD}=\frac{BD}{CE}$，即 $\frac{10}{CD}=\frac{9-CD}{2}$，$\therefore CD=4$ 或 5.

刷 素养

5.【解】(1) 在菱形 $ABCD$ 中，$DA=DC$，$AD/\!/CB$.

$\because \angle B=60°$，$\therefore \angle D=60°$，$\angle BAD=120°$，

则 $\angle BAC=\angle DAC=60°$，

$\therefore \triangle ACD$ 是等边三角形，则 $AC=DC$.

在 $\triangle AEC$ 和 $\triangle DFC$ 中，$\begin{cases}AE=DF,\\ \angle EAC=\angle D=60°,\\ AC=DC,\end{cases}$

$\therefore \triangle AEC\cong\triangle DFC(\mathrm{SAS})$，$\therefore \angle ACE=\angle DCF$.

$\because \angle ACD=60°=\angle ACF+\angle DCF$，$\therefore \angle ECF=\angle ACF+\angle ACE=60°$.

(2) ①由(1)知 $AC=CD=AD$，

$\therefore \frac{AF}{CD}+\frac{AE}{AC}=\frac{AF}{AD}+\frac{FD}{AD}=\frac{AD}{AD}=1$. 故答案为 1.

②由(1)知 $\triangle AEC\cong\triangle DFC$，$\therefore EC=CF$. $\because \angle ECF=60°$，$\therefore \triangle CEF$ 是等边三角形，则 $\angle EFC=\angle CEF=60°$. $\because \angle CAF=\angle CFG=60°$，$\angle FCA=\angle FCA$，$\therefore \triangle GFC\backsim\triangle FAC$，$\therefore \frac{GF}{FA}=\frac{FC}{AC}$，

$\therefore \frac{AF}{AC}=\frac{FG}{FC}$.

$\because AC=CD,EC=FC,\therefore \frac{AF}{CD}-\frac{FG}{EC}=\frac{AF}{AC}-\frac{FG}{FC}=0$. 故答案为 0.

③$\because\ \angle BAC=\angle CEG=\angle B=60^\circ$, $\angle AEG+\angle CEG=\angle B+\angle BCE$, $\therefore \angle BCE=\angle AEG$, $\therefore \triangle AEG\backsim\triangle BCE$,

$\therefore \frac{AE}{BC}=\frac{AG}{BE}$, 则 $\frac{AG}{AE}=\frac{BE}{BC}$.

$\because\ \angle D=\angle CFE=\angle CAF=60^\circ$, $\angle AFG+\angle CFG=\angle DCF+\angle D$,

$\therefore \angle AFG=\angle DCF$, $\therefore \triangle DFC\backsim\triangle AGF$,

$\therefore \frac{DF}{AG}=\frac{CD}{AF}$, 则 $\frac{AG}{AF}=\frac{DF}{DC}$.

$\because AB=AD,AE=DF,\therefore BE=AF$,

$\therefore \frac{AG}{AE}+\frac{AG}{AF}=\frac{BE}{BC}+\frac{DF}{DC}=\frac{AF}{AD}+\frac{DF}{AD}=\frac{AD}{AD}=1$. 故答案为 1.

(3)①由(2)③可知, $\frac{DF}{AG}=\frac{CD}{AF}$,

$\therefore AF\cdot DF=CD\cdot AG=AC\cdot AG$.

由(2)②可知, $\triangle GFC\backsim\triangle FAC$, $\therefore \frac{CG}{CF}=\frac{CF}{AC}$, $\therefore CF^2=CG\cdot AC$.

$\because CF^2=3AF\cdot FD$, $\therefore CG\cdot AC=3AC\cdot AG$, $\therefore CG=3AG$, $\therefore AC=4AG$. 设$\triangle AEC$边 AC 上的高为 h,

$$\therefore \frac{S_1}{S_3}=\frac{\frac{1}{2}\times AG\times h}{\frac{1}{2}\times AC\times h}=\frac{1}{4}.$$

②存在. $\because\ \angle GAF=\angle EAC=60^\circ=\angle CEG$,

$\angle GAF+\angle AFG+\angle AGF=\angle CEG+\angle CGE+\angle ECG=180^\circ$,

$\angle AGF=\angle CGE$, $\therefore \angle AFG=\angle ACE$, $\therefore \triangle AFG\backsim\triangle ACE$,

同理可证明$\triangle AGE\backsim\triangle AFC$,

$\therefore \frac{S_1}{S_4}=\left(\frac{AE}{AC}\right)^2$, $\frac{S_2}{S_3}=\left(\frac{AF}{AC}\right)^2$.

设 $AE=DF=x$, $\therefore \frac{S_1}{S_4}+\frac{S_2}{S_3}=\frac{x^2}{36}+\frac{(6-x)^2}{36}=\frac{1}{18}(x-3)^2+\frac{1}{2}$, $\therefore$ 当 $x=3$ 时, $\frac{S_1}{S_4}+\frac{S_2}{S_3}$的值最小,最小值为$\frac{1}{2}$.

专题9 相似三角形常考模型

刷难关

1. B 【解析】由题意得 $AB\perp BC$, $\therefore \angle ABC=90^\circ$. $\because DE\perp AC$, $\therefore \angle DEC=90^\circ$, $\therefore \angle DEC=\angle ABC=90^\circ$. $\because AB=60$ cm, $AB+BC=140$ cm, $\therefore BC=140-60=80$(cm), $\therefore AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{60^2+80^2}=100$(cm). $\because$ 点 D 是 BC 的中点, $\therefore CD=\frac{1}{2}BC=40$ cm. $\because\ \angle ACB=\angle DCE$, $\therefore \triangle ECD\backsim\triangle BCA$, $\therefore \frac{CD}{CA}=\frac{DE}{BA}$, $\therefore \frac{40}{100}=\frac{DE}{60}$, $\therefore DE=24$ cm, 故选 B.

2. $\frac{20}{3}$ 【解析】$\because$ 将 Rt$\triangle ABC$ 沿 BC 边所在直线向右平移 2 个单位长度得到 Rt$\triangle DEF$, $\therefore BE=2$, $DE/\!/AB$, $\therefore CE=BC-BE=6-2=4$. $\because ME/\!/AB$, $\therefore \triangle CME\backsim\triangle CAB$, $\therefore \frac{CE}{BC}=\frac{EM}{BA}$. $\because AB=8$, $BC=6$, $CE=4$, $\therefore \frac{4}{6}=\frac{EM}{8}$, $\therefore EM=\frac{16}{3}$. 在 Rt$\triangle CME$ 中, $CM=\sqrt{CE^2+ME^2}=\sqrt{4^2+\left(\frac{16}{3}\right)^2}=\frac{20}{3}$, 故答案为$\frac{20}{3}$.

3. C 【解析】$\because\ \angle AEB=\angle CED$, $\angle A=\angle C$, $\therefore \triangle AEB\backsim\triangle CED$, $\therefore \frac{AE}{CE}=\frac{BE}{DE}$, $\therefore \frac{2}{CE}=\frac{3}{5}$, $\therefore CE=\frac{10}{3}$, 故选 C.

4. D 【解析】根据题意可得四边形 $ADOE$, $EOCB$, $ABCD$ 是矩形, $\therefore AD=BC=EO$, $OD=AE$, $CO=BE$. 设点 A 的坐标为 $\left(a,\frac{4}{a}\right)(a>0)$, 则 $OD=a$, $OE=\frac{4}{a}$, $\therefore$ 点 B 的纵坐标为$\frac{4}{a}$, $\therefore$ 点 B 的横坐标为$-\frac{a}{2}$, $\therefore OC=\frac{a}{2}$, $\therefore BE=\frac{a}{2}$. $\because AB/\!/CD$, $\therefore$ 易得$\triangle BEF\backsim\triangle DOF$, $\therefore \frac{EF}{OF}=\frac{BE}{OD}=\frac{1}{2}$, $\therefore EF=\frac{1}{3}OE=\frac{4}{3a}$, $OF=\frac{2}{3}OE=\frac{8}{3a}$, $\therefore S_{\triangle BEF}=\frac{1}{2}EF\cdot BE=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3a}\times\frac{a}{2}=\frac{1}{3}$, $S_{\triangle ODF}=\frac{1}{2}OD\cdot OF=\frac{1}{2}\times a\times\frac{8}{3a}=\frac{4}{3}$, $\therefore S_{阴影}=S_{\triangle BEF}+S_{\triangle ODF}=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}=\frac{5}{3}$, 故选 D.

5. (1)【证明】$\because\ \angle ACB=90^\circ$, $CD\perp AB$ 于 D, $\therefore \angle ADC=\angle ACB=90^\circ$. $\because\ \angle CAD=\angle BAC$, $\therefore \triangle ABC\backsim\triangle ACD$.

(2)【解】$\because\ \triangle ABC\backsim\triangle ACD$, $\therefore \frac{AC}{AD}=\frac{AB}{AC}$, 即$\frac{5}{AD}=\frac{8}{5}$, $\therefore AD=\frac{25}{8}$.

6. (1)【解】$\because\ \angle A=\angle DEC=40^\circ$,

$\therefore \angle ADE+\angle AED=140^\circ$, $\angle BEC+\angle AED=140^\circ$,

$\therefore \angle ADE=\angle BEC$.

又$\because\ \angle A=\angle B$, $\therefore \triangle ADE\backsim\triangle BEC$, $\therefore$ 点 E 是四边形 $ABCD$ 的边 AB 上的"相似点".

故答案为是.

(2)【解】点 C 是四边形 $ABED$ 边 DE 上的"相似点".

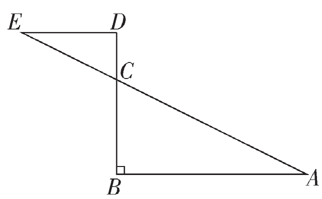
理由:$\because\ \angle ACB=90^\circ$, $\therefore \angle ACD+\angle BCE=90^\circ$. $\because AD\perp DE$, $\therefore \angle ADC=90^\circ$, $\therefore \angle ACD+\angle DAC=90^\circ$, $\therefore \angle DAC=\angle ECB$. $\because BE\perp DE$, $\therefore \angle BEC=\angle ADC=90^\circ$, $\therefore \triangle ADC\backsim\triangle CEB$, $\therefore$ 点 C 是四边形 $ABED$ 边 DE 上的"相似点".

(3)【证明】$\because DP$ 平分$\angle ADC$, $\therefore 2\angle ADP=2\angle PDC=\angle ADC$. $\because CP$ 平分$\angle BCD$, $\therefore 2\angle BCP=2\angle PCD=\angle BCD$. $\because AD/\!/BC$, $\therefore \angle ADC+\angle BCD=180^\circ$, $\therefore 2\angle PDC+2\angle PCD=180^\circ$, $\therefore \angle PDC+\angle PCD=90^\circ$, $\therefore \angle DPC=90^\circ$. $\because AB\perp AD$, $\therefore \angle A=\angle DPC=90^\circ$. $\because\ \angle ADP=\angle PDC$, $\therefore \triangle ADP\backsim\triangle PDC$. 同理可得$\triangle PDC\backsim\triangle BPC$, $\therefore \triangle ADP\backsim\triangle PDC\backsim\triangle BPC$, $\therefore$ 点 P 是四边形 $ABCD$ 边 AB 上的一个"强相似点".

7.【解】(1)①当 $\alpha=0°$时,如题图(1)所示. 在 Rt△ABC 中,$\angle B=90°$,$AB=4$,$BC=2$,∴ $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=2\sqrt{5}$. ∵ 点 D,E 分别是边 BC,AC 的中点,∴ $CE=AE=\frac{1}{2}AC=\sqrt{5}$,$BD=CD=\frac{1}{2}BC=1$,∴ $\frac{AE}{BD}=\sqrt{5}$. 故答案为$\sqrt{5}$.

②如图(1),当 $\alpha=180°$时,易得点 D,C,B 共线,点 E,C,A 共线. 由①得 $CD=1$,$CE=\sqrt{5}$,$BC=2$,$AC=2\sqrt{5}$,

∴ $AE=AC+CE=3\sqrt{5}$,$BD=BC+CD=3$,∴ $\frac{AE}{BD}=\frac{3\sqrt{5}}{3}=\sqrt{5}$. 故答案为$\sqrt{5}$.



图(1)

(2)当 $0°<\alpha<360°$时,$\frac{AE}{BD}=\sqrt{5}$,大小没有变化.

证明过程如下:∵ △ECD∽△ACB,∴ $\frac{EC}{AC}=\frac{CD}{CB}$.

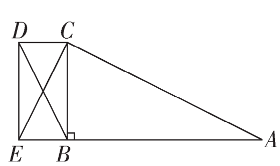
又∵ $\angle ECA=\angle DCB=\alpha$,

∴ △ECA∽△DCB,∴ $\frac{AE}{BD}=\frac{EC}{DC}=\sqrt{5}$. 故答案为$\frac{CD}{CB}$,$\sqrt{5}$.

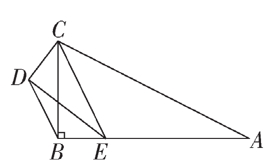
(3)①如图(2),当点 E 在 AB 的延长线上时,

在 Rt△BCE 中,$CE=\sqrt{5}$,$BC=2$,∴ $BE=\sqrt{CE^2-BC^2}=1$,

∴ $AE=AB+BE=4+1=5$. ∵ $\frac{AE}{BD}=\sqrt{5}$,∴ $BD=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$.



图(2)



图(3)

②如图(3),当点 E 在线段 AB 上时,

在 Rt△BCE 中,$CE=\sqrt{5}$,$BC=2$,∴ $BE=\sqrt{CE^2-BC^2}=1$,

∴ $AE=AB-BE=4-1=3$. ∵ $\frac{AE}{BD}=\sqrt{5}$,∴ $BD=\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$. 综上,线段 BD 的长为$\frac{3\sqrt{5}}{5}$或$\sqrt{5}$.

考点 23　锐角三角函数

刷基础

1. A　【解析】∵ $\left(\sin A-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left|\frac{1}{2}-\cos B\right|=0$,∴ $\sin A-\frac{\sqrt{3}}{2}=0$,$\frac{1}{2}-\cos B=0$,∴ $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\cos B=\frac{1}{2}$,∴ $\angle A=60°$,$\angle B=60°$,∴ 在锐角三角形 ABC 中,$\angle C=180°-\angle A-\angle B=60°$,故选 A.

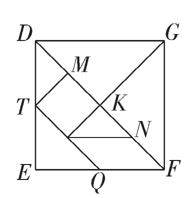
2. 0　【解析】原式$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}-1=1-1=0$. 故答案为 0.

3. C　【解析】在 Rt△ABC 中,$\angle C=90°$,$AB=4$,$AC=3$,∴ $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{7}$,∴ $\cos B=\frac{BC}{AB}=\frac{\sqrt{7}}{4}$. 故选 C.

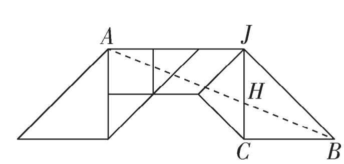
4. A　【解析】∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形,∴ $\angle A=\angle B=\angle C=90°$,∴ $\angle BEF+\angle BFE=90°$. ∵ 将矩形 $ABCD$ 沿 DE 折叠,使点 C 落在 AB 边的点 F 处,∴ $\angle DFE=\angle C=90°$,∴ $\angle DFA+\angle BFE=90°$,∴ $\angle DFA=\angle BEF$,∴ $\sin\angle BEF=\sin\angle DFA=\frac{4}{5}=\frac{BF}{EF}$,∴ 设 $BF=4x$,$EF=5x$,则 $BE=3x$,$CE=FE=5x$,∴ $AD=BC=8x$. ∵ $\sin\angle DFA=\frac{4}{5}$,∴ $DF=10x$. ∵ $\angle DFE=90°$,$DE=5\sqrt{5}$,∴ $DF^2+EF^2=DE^2$,即$(10x)^2+(5x)^2=(5\sqrt{5})^2$,解得 $x=1$(负值已舍去),∴ $AD=8x=8$,$DC=DF=10x=10$,∴ 矩形 $ABCD$ 的面积为 $AD\cdot CD=8\times10=80$. 故选 A.

5. $\frac{18}{5}$　【解析】在 Rt△ABC 中,$BC=AC\cdot\cos C=10\times\frac{3}{5}=6$,∴ 在 Rt△$BDC$ 中,$CD=BC\cdot\cos C=6\times\frac{3}{5}=\frac{18}{5}$,故答案为$\frac{18}{5}$.

6. $\frac{2}{5}$　【解析】如图(1)所示,根据题意得 $DG=GF=2$,∴ $DF=2\sqrt{2}$,$ET=EQ=1$,∴ $DM=MK=KN=NF=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 如图(2),易知 $AJ=3\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,$BC=JC=\sqrt{2}$,$AJ/\!/BC$,$\angle JCB=90°$,∴ 易得△$AJH$∽△$BCH$,∴ $\frac{AJ}{BC}=\frac{JH}{CH}=\frac{3}{2}$,∴ $CH=\frac{2}{5}JC=\frac{2\sqrt{2}}{5}$,∴ $\tan\angle ABC=\frac{CH}{BC}=\frac{2}{5}$. 故答案为$\frac{2}{5}$.



图(1)



图(2)

7.【解】(1)由旋转得,$\angle AB'E'=\angle ABE$. ∵ $\angle ABE+\angle ABE'=180°$,∴ $\angle AB'E'+\angle ABE'=180°$. ∵ $BE\perp B'E'$,∴ 在四边形 $ABE'B'$中,$\angle BAB'=360°-180°-90°=90°$.

(2)如图,过点 A 作 $AP\perp EE'$于点 P,过点 B'作 $B'H\perp AP$ 于点 H.

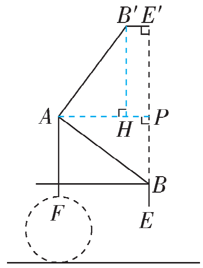
∵ $AF/\!/BE$,∴ $\angle ABP=\angle BAF$.

在 Rt△ABP 中,$\angle APB=90°$,

∴ $\sin\angle ABP=\sin\angle BAF=\frac{4}{5}=\frac{AP}{AB}=\frac{AP}{50}$,

$\therefore AP=40$，$\therefore BP=\sqrt{50^2-40^2}=30$.

由(1)知，$\angle BAB'=90°$，即 $\angle B'AP+\angle PAB=90°$.



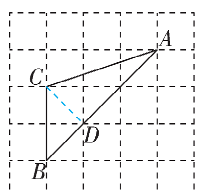
$\because \angle ABP+\angle PAB=90°$，$\therefore \angle B'AP=\angle ABP$. 由旋转得，$AB=AB'$. $\because \angle APB=\angle AHB'=90°$，$\therefore \triangle BPA\cong\triangle AHB'$，

$\therefore PA=HB'=40$.

$\because BE\perp B'E'$，$\therefore \angle B'E'P=\angle B'HP=\angle APE'=90°$，$\therefore$ 四边形 $B'E'PH$ 是矩形，$\therefore PE'=HB'=40$，$\therefore BE'=BP+PE'=30+40=70$(cm). 故 BE' 的长度为 70 cm.

刷 易错

8. B 【解析】如图所示，取格点 D，连接 CD. 设每个小正方形的边长为 1. $\because AC^2=3^2+1^2=10$，$CD^2=1^2+1^2=2$，$AD^2=2^2+2^2=8$，$\therefore AD^2+CD^2=AC^2$，即 $\triangle ACD$ 是直角三角形，$\angle ADC=90°$. 在 Rt$\triangle ACD$ 中，$AC=\sqrt{10}$，$CD=\sqrt{2}$，$\therefore \sin A=\dfrac{CD}{AC}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，故选 B.



易错警示

利用锐角三角函数解题的前提

非直角三角形中不能直接利用锐角三角函数求解，可以构造直角三角形，再利用锐角三角函数求解.

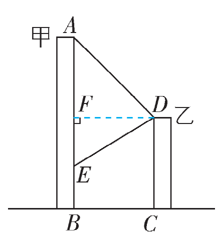
考点 24　锐角三角函数的实际应用

刷 提升

1.【解】过点 D 作 $DF\perp AB$ 于点 F，如图所示.

在 Rt$\triangle ADF$ 中，$DF=BC=21$ 米，$\angle ADF=45°$，$\therefore AF=DF=21$ 米.

在 Rt$\triangle EDF$ 中，$DF=21$ 米，$\angle EDF=30°$，



$\therefore EF=DF\times\tan 30°=7\sqrt{3}$ 米，

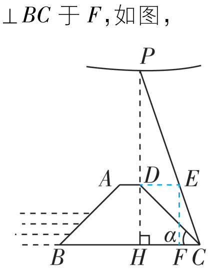
$\therefore AE=AF+EF=7\sqrt{3}+21\approx 33.1$(米).

答：条幅 AE 的长约是 33.1 米.

2.【解】(1)$\because \tan\alpha=i=1:1=1$，$\therefore \alpha=45°$.

(2)延长 AD 交 PC 于点 E，过点 E 作 $EF\perp BC$ 于 F，如图，

则四边形 $DEFH$ 是矩形，$\therefore EF=DH=12$ m，$DE=HF$. $\because \alpha=45°$，$\therefore \angle HDC=45°$，$\therefore HC=DH=12$ m $=EF$.



又$\because \angle PCD=26°$，$\therefore \angle ECF=45°+26°=71°$. 在 Rt$\triangle CEF$ 中，$\because \tan\angle ECF=\dfrac{EF}{FC}$，

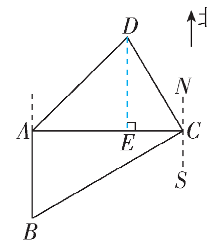
$\therefore FC=\dfrac{EF}{\tan 71°}\approx\dfrac{12}{2.90}\approx 4.14$(m)，$\therefore HF=HC-CF=12-4.14=7.86$(m)，$\therefore DE=7.86$ m.

$\because AE/\!/BC$，$\therefore \angle PED=\angle PCH=71°$.

在 Rt$\triangle PDE$ 中，$\tan\angle PED=\dfrac{PD}{DE}$，即 $\tan 71°=\dfrac{PD}{7.86}$，$\therefore PD\approx 7.86\times 2.90\approx 22.79(m)>18$ m，$\therefore$ 此次改造符合电力部门的安全要求.

3.【解】(1)如图，过 D 点作 AC 的垂线，垂足为 E 点.

根据题意得，$\angle DCN=30°$，$CD=100$ 海里，$\angle DAE=45°$，$\therefore \angle EDC=30°$.



在 Rt$\triangle CDE$ 中，$ED=CD\cdot\cos\angle EDC=100\times\cos 30°=50\sqrt{3}$(海里).

在 Rt$\triangle ADE$ 中，$AD=\dfrac{DE}{\sin\angle DAE}=\dfrac{50\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=50\sqrt{6}\approx 122.5$(海里).

(2)由(1)知，$CD=100$ 海里，$AD=122.5$ 海里，$DE=50\sqrt{3}$ 海里，

$\therefore$ 路线 $C-D-A$ 长为 $AD+CD=100+122.5=222.5$(海里).

由题意易得 $AE=DE=50\sqrt{3}$ 海里，$CE=\dfrac{1}{2}CD=50$ 海里，

$\therefore AC=AE+EC=(50+50\sqrt{3})$ 海里.

由题意得 $\angle BCS=60°$，$\therefore \angle ACB=30°$.

在 Rt$\triangle ABC$ 中，$AB=AC\cdot\tan 30°=(50+50\sqrt{3})\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{150+50\sqrt{3}}{3}$ 海里，

$\therefore BC=2AB=\dfrac{300+100\sqrt{3}}{3}$ 海里，

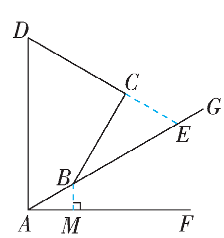
$\therefore$ 路线 $C-B-A$ 长为 $AB+BC=\dfrac{150+50\sqrt{3}}{3}+\dfrac{300+100\sqrt{3}}{3}=150+50\sqrt{3}\approx 236.5$(海里)，

则 $AD+CD<AB+BC$，即路线 $C-D-A$ 较短.

4.【解】(1)如图，过点 B 作 $BM\perp AF$ 于点 M.

$\because \angle GAF=30°$，$AB=20$ cm，$\therefore BM=\dfrac{1}{2}AB=10$ cm，

即点 B 到水平面 AF 的距离为 10 cm.



(2)如图，延长 DC 交 AG 于点 E.

$\because \angle BCD=90°$，$\angle CBG=30°$，

$\therefore \angle AED=60°$.

$\because \angle BAF=30°$，$AD\perp AF$，$\therefore \angle DAE=60°$，$\therefore \triangle ADE$ 是等边三角形，$\therefore AE=DE$，$\therefore AB+BE=CE+CD$，$\therefore CD=AB+BE-CE$.

第一部分 考点过关
第二部分 题型突破
第三部分 中考新趋势
狂K重点

$\because AB=20\ \text{cm}, BC=40\ \text{cm}$，$\therefore$ 在 $Rt\triangle BCE$ 中，$BE=\dfrac{BC}{\cos\angle CBE}=\dfrac{40}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{80\sqrt{3}}{3}(\text{cm})$，$\therefore CE=BE\cdot\sin\angle CBE=BE\cdot\sin 30^\circ=\dfrac{40\sqrt{3}}{3}\ \text{cm}$，

$\therefore CD=AB+BE-CE=20+\dfrac{80\sqrt{3}}{3}-\dfrac{40\sqrt{3}}{3}=20+\dfrac{40\sqrt{3}}{3}\approx 43(\text{cm})$.

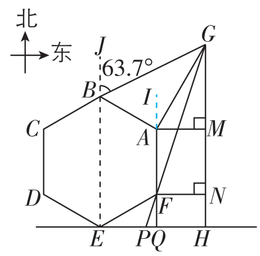
刷 素养

5.【解】(1) 如图，延长 FA 至 I. $\because$ 六边形 $ABCDEF$ 是正六边形，

$\therefore \angle BAI=360^\circ\div 6=60^\circ$.

由题意得 $\angle IAG=30^\circ$，$\angle ABC=\angle BAF=180^\circ-\angle BAI=120^\circ$，

$\therefore \angle BAG=60^\circ+30^\circ=90^\circ$，$\angle ABE=\dfrac{1}{2}\angle ABC=60^\circ$，



$\therefore \angle ABG=180^\circ-63.7^\circ-60^\circ=56.3^\circ$.

故答案为 90，56.3.

(2) 在 $Rt\triangle BAG$ 中，$\angle ABG=56.3^\circ$，$AB=20$，$\tan\angle ABG=\dfrac{AG}{AB}$，

$\therefore AG=AB\cdot\tan 56.3^\circ\approx 20\times 1.50=30$. 由题意得 $AF/\!/GH$，

$\therefore \angle AGM=\angle IAG=30^\circ$. 在 $Rt\triangle MAG$ 中，$\angle AGM=30^\circ$，$\therefore AM=\dfrac{1}{2}AG=15$ 米，$\therefore$ 点 A 到道路 GH 的距离 AM 约为 15 米.

(3) 在 $Rt\triangle EFQ$ 中，$\angle EFQ=60^\circ$，$EF=20$，$\therefore \angle FEQ=30^\circ$，

$\therefore FQ=\dfrac{1}{2}EF=10$.

易得四边形 $FQHN$，$AFNM$ 是矩形，$\therefore NH=FQ=10$，$FN/\!/QH$，$MN=AF=20$，$FN=AM=15$.

在 $Rt\triangle MAG$ 中，$AG=30$，$AM=15$，

$\therefore GM=\sqrt{AG^2-AM^2}=15\sqrt{3}\approx 25.95$，

$\therefore GN=GM+MN=45.95$，$GH=GM+MN+NH=55.95$.

$\because FN/\!/PH$，$\therefore \triangle GFN\backsim\triangle GPH$，

$\therefore \dfrac{PH}{FN}=\dfrac{GH}{GN}$，即 $\dfrac{PH}{15}=\dfrac{55.95}{45.95}$，$\therefore PH\approx 18$ 米.

答：她最多走 18 米，就不能观察到芙蓉龙造型的园艺作品了.

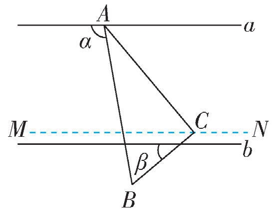
C 检测验收练

刷 速度

1. B 【解析】设第三边的长为 x cm. 由三角形的三边关系可得 $7-4<x<7+4$，即 $3<x<11$，所以它的第三边的长可能是 4 cm. 故选 B.

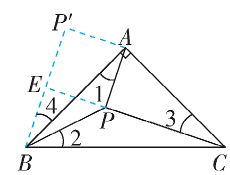
2. D 【解析】$\because \angle ACB=50^\circ$，$\angle DAC=115^\circ$，$\therefore$ 直线 DE 与 BC 所夹锐角的度数为 $115^\circ-50^\circ=65^\circ$，故选 D.

3. B 【解析】如图，过点 C 作 $MN/\!/a$. $\because a/\!/b$，$\therefore a/\!/MN/\!/b$，$\therefore \angle ACM=180^\circ-\angle\alpha-\angle BAC=50^\circ$，$\therefore \angle BCM=90^\circ-\angle ACM=40^\circ$，$\therefore \angle\beta=\angle BCM=40^\circ$. 故选 B.



4. B 【解析】$\because DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线，$BC=13$，$\therefore DE/\!/BC$，$DE=\dfrac{1}{2}BC=6.5$，点 E 是 AC 的中点，$\therefore \angle EFC=\angle BCF$. 又 $\because \angle ACB$ 的平分线交 DE 于点 F，$AC=6$，$\therefore \angle BCF=\angle ECF$，$CE=\dfrac{1}{2}AC=3$，$\therefore \angle EFC=\angle ECF$，$\therefore EF=CE=3$，$\therefore DF=DE-EF=6.5-3=3.5$，故选 B.

5. D 【解析】如图，把 $\triangle APC$ 绕点 A 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle AP'B$，延长 CP 交 BP' 于点 E，则 $\angle 4=\angle 3$，$\angle P'=\angle APC$，$\angle PAP'=90^\circ$，$AP'=AP$，$BP'=CP$. $\because \angle 1=\angle 2=\angle 3$，$\therefore \angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4$，$\therefore AP/\!/BP'$，



$\therefore \angle P'=180^\circ-\angle PAP'=180^\circ-90^\circ=90^\circ$，$\therefore \angle APC=90^\circ$，$\therefore \angle APE=180^\circ-90^\circ=90^\circ$. $\because \angle PAP'=\angle P'=\angle APE=90^\circ$，$\therefore$ 四边形 $APEP'$ 是矩形，$\therefore \angle PEP'=\angle BEP=90^\circ$. $\because AP'=AP$，$\therefore$ 四边形 $APEP'$ 是正方形，$\therefore EP'=EP=AP'$. $\because AB=AC$，$\angle BAC=90^\circ$，$\therefore \angle ABC=\angle ACB=45^\circ$. $\because \angle 2=\angle 4$，$\therefore \angle EBP=\angle ABC=45^\circ$，$\therefore \triangle BEP$ 是等腰直角三角形，$\therefore BE=EP$，$\therefore BP'=2P'E=2AP'$. $\because \triangle ABC$ 的面积为 10，$\therefore \dfrac{1}{2}AB^2=10$，$\therefore AB^2=20$. 在 $Rt\triangle AP'B$ 中，$AP'^2+BP'^2=AB^2$，$\therefore AP'^2+(2AP')^2=20$，$\therefore AP'=2$，$\therefore BE=AP'=2$，$BP'=2AP'=4$，$\therefore CP=4$，$\therefore S_{\triangle PBC}=\dfrac{1}{2}CP\cdot BE=\dfrac{1}{2}\times4\times2=4$，故选 D.

6. B 【解析】在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle A=36^\circ$，$\therefore \angle ABC=\angle ACB=\dfrac{1}{2}(180^\circ-\angle A)=72^\circ$. 由作图可知 $BE=BC$，$\therefore \angle BEC=\angle BCE=72^\circ$，$\triangle BCE$ 是等腰三角形，$\therefore \angle EBC=180^\circ-\angle BEC-\angle BCE=36^\circ$，$\therefore \angle ABE=\angle ABC-\angle EBC=36^\circ$，$\therefore \angle ABE=\angle A=36^\circ$，$\therefore AE=BE$，$\therefore \triangle ABE$ 是等腰三角形. $\because$ 作 BE 的垂直平分线交 AB 于点 F，连接 EF，$\therefore BF=EF$，$\therefore \triangle BEF$ 是等腰三角形，$\angle BEF=\angle EBF=36^\circ$，$\therefore \angle AFE=\angle BEF+\angle EBF=72^\circ$，$\therefore \angle AEF=180^\circ-\angle A-\angle AFE=72^\circ$，$\therefore \angle AFE=\angle AEF$，$\therefore AF=AE$，$\therefore \triangle AEF$ 是等腰三角形. 综上可知，题图中(除 $\triangle ABC$ 外)的等腰三角形有 4 个，故选 B.

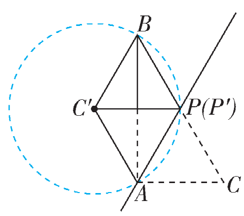
7. B 【解析】$\because$ 正三角形 ABC 的边长为 1，$\therefore AB=BC=1$，$\angle B=60^\circ$. ①若 AG 的长为 $\dfrac{4}{5}$，则 BG 的长为 $\dfrac{1}{5}$，$\therefore BD$ 的长为 $\dfrac{2}{5}<1$，$\therefore AG$ 的长可以为 $\dfrac{4}{5}$，故①正确. ②设 BG 的长度为 x，则

BD 的长度为 $2x$. ∵ $DG\perp AB$,∴ $DG=BG\cdot\tan 60°=\sqrt{3}x$,∴ $\triangle GBD$ 的面积为 $\frac{1}{2}BG\cdot DG=\frac{1}{2}x\times\sqrt{3}x=\frac{\sqrt{3}}{2}x^2$. ∵ D 是线段 BC 上一点,∴ $0\leqslant 2x\leqslant 1$,∴ $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$,∴ 当 $x=\frac{1}{2}$,即 $BD=1$ 时,$\triangle GBD$ 的面积有最大值,最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{8}$,故②错误. ③若 $\triangle GBD$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{64}$,则 $\frac{\sqrt{3}}{2}x^2=\frac{\sqrt{3}}{64}$,解得 $x=\frac{\sqrt{2}}{8}$(负值已舍去),故③错误. 故选 B.

8. 8 【解析】由题意可得 $CD=1-(-3)=4$. ∵ $\angle BCA=90°$,点 D 为 AB 的中点,∴ $AB=2CD=8$,故答案为 8.

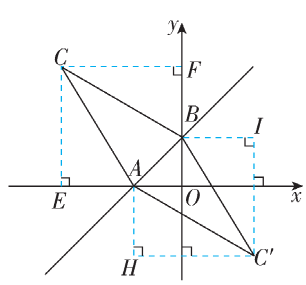
9. 3 【解析】设 $CD=x$,则 $AC=\frac{CD}{\tan 30°}=\sqrt{3}x$. ∵ $AC^2+BC^2=AB^2$,∴ $(\sqrt{3}x)^2+(x+2)^2=(2\sqrt{3})^2$,解得 $x=1$(负值已舍去),∴ $BC=CD+BD=1+2=3$. 故答案为 3.

10. 1 【解析】∵ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$\angle BAC=90°$,$\angle ABC=30°$,$AC=1$,∴ $\angle C=60°$,$BC=2AC=2$. 由翻折的性质得,$\angle AC'P=\angle C=60°$. 当 $AC'=BC'$ 时,以点 C' 为圆心,AC' 为半径画圆交 BC 于点 P',如图所示,则点 B 在圆上.



∵ $\angle ABP'=\frac{1}{2}\angle AC'P=30°$,∴ 点 P 与点 P' 重合,∴ $C'P=C'A$,∴ $\triangle AC'P$ 是等边三角形,∴ 结合翻折可得,$C'P=CP=C'A=AC=1$,∴ $BP=BC-CP=2-1=1$,故答案为 1.

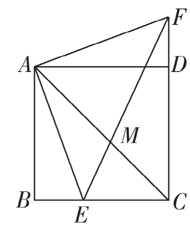
11. $-3-\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{3}+1$ 【解析】对于直线 $y=x+2$,当 $x=0$ 时,$y=2$;当 $y=0$ 时,$x=-2$,∴ $A(-2,0)$,$B(0,2)$,∴ $OA=OB=2$,∴ $\angle OAB=\angle OBA=45°$. 如图,①当点 C 在直线 AB 左侧时,作 $CE\perp x$ 轴于点 E,作 $CF\perp y$ 轴于点 F,∴ $\angle CEA=\angle CFB=\angle EOF=90°$,∴ 四边形 $CEOF$ 是矩形,∴ $CF=OE$. ∵ $CA=CB$,$\angle ACB=30°$,



∴ $\angle CAB=\angle CBA=\frac{180°-30°}{2}=75°$,∴ $\angle CAE=\angle CBF=180°-45°-75°=60°$,∴ $\triangle CAE\cong\triangle CBF$(AAS),∴ $CE=CF$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ACE$ 中,设 $AE=a$,∴ $CE=\tan 60°\cdot a=\sqrt{3}a$,∴ $CF=CE=\sqrt{3}a$. ∵ $OE=a+2$,$OE=CF$,∴ $a+2=\sqrt{3}a$,解得 $a=\sqrt{3}+1$,∴ $OE=\sqrt{3}+1+2=\sqrt{3}+3$,则点 C 的横坐标为 $-\sqrt{3}-3$. ②当点 C' 在直线 AB 右侧时,作 $C'I\perp x$ 轴,作 $BI\perp C'I$,与 $C'I$ 交于点 I,作 $C'H\perp y$ 轴,作 $AH\perp C'H$,与 $C'H$ 交于点 H. 易得 $\angle HAC'=\angle IBC'=60°$. 同理可得,$\triangle C'AH\cong\triangle C'BI$,∴ $C'I=C'H$,$BI=AH$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AC'H$ 中,设 $AH=b$,∴ $BI=b$,$C'H=\tan 60°\cdot b=\sqrt{3}b$. 易知 $C'H=C'I=b+2$,∴ $b+2=\sqrt{3}b$,解得 $b=\sqrt{3}+1$,则点 C' 的横坐标为 $\sqrt{3}+1$. 故答案为 $-3-\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{3}+1$.

12. (1)【证明】∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,∴ $AB=AD$,$\angle B=\angle ADC=\angle ADF=90°$. 由旋转的性质得,$AE=AF$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle ADF$ 中,$\begin{cases}AB=AD,\\AE=AF,\end{cases}$ ∴ $\mathrm{Rt}\triangle ABE\cong\mathrm{Rt}\triangle ADF$(HL).

(2)【解】如图,由(1)得,$\mathrm{Rt}\triangle ABE\cong\mathrm{Rt}\triangle ADF$,∴ $\angle BAE=\angle DAF$,∴ $\angle BAE+\angle DAE=\angle DAF+\angle DAE$,即 $\angle BAD=\angle EAF$. ∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,∴ $\angle BAD=90°$,$\angle BAC=45°$,∴ $\angle EAF=\angle BAD=90°$,$\angle CAE=\angle BAC-\angle BAE=45°-20°=25°$. 又 ∵ $AE=AF$,∴ $\triangle AEF$ 是等腰直角三角形,$\angle AEF=45°$,∴ $\angle AME=180°-\angle AEF-\angle CAE=180°-45°-25°=110°$,∴ $\angle CMF=\angle AME=110°$. 故答案为 110°.



13.【解】(1)∵ $\angle ADC=90°$,$\alpha=25°$,

∴ $\angle AEC=90°+25°=115°$.

∵ $CP/\!/AB$,∴ $\beta=\angle AEC=115°$.

答:摩擦力 P 的方向与重力 G 的方向的夹角 β 的度数为 115°.

(2)在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 中,$\sin\alpha=\sin 25°=\frac{DE}{AE}$.

∵ $AE=30$,∴ $DE\approx AE\times 0.42=30\times 0.42=12.6$.

∵ $CE=2.4$,∴ $CD=CE+DE=2.4+12.6=15$(cm).

答:在此次实验中,小物件的铅垂高 CD 约为 15 cm.

14.【解】(1)四边形 $BDEG$ 是矩形.

理由:由折叠的性质得,$\angle EDF=\angle EDC=90°$,$\angle AGE=\angle BGE=90°$.

又 ∵ $\angle DBG=90°$,∴ 四边形 $BDEG$ 是矩形.

(2)$GF/\!/AC$,$AC=3GF$.

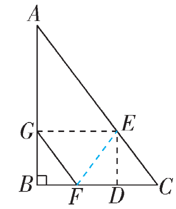
理由:如图(1),连接 EF.

由(1)知,四边形 $BDEG$ 是矩形,$\angle FBG=\angle FDE=90°$,则 $BG=DE$.

∵ F 为 BD 的中点,∴ $BF=DF$,

∴ $\triangle FBG\cong\triangle FDE$(SAS),

∴ $\angle BFG=\angle DFE$.



图(1)

由折叠的性质得,$DF=DC$,$\angle DCE=\angle DFE$,

∴ $BF=DF=DC$,$\angle BFG=\angle DCE$,

∴ $BC=3BF$,$GF/\!/AC$,∴ $\triangle BFG\backsim\triangle BCA$,

∴ $\frac{BF}{BC}=\frac{GF}{AC}=\frac{1}{3}$,∴ $AC=3GF$.

故 $GF/\!/AC$,$AC=3GF$.

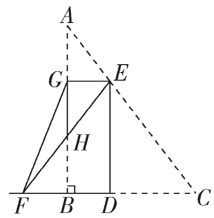
(3) $\triangle GEF$ 面积的最大值为 6，此时 $CD=3$. 如图(2)，$\because BC=6, AC=10$，

$\therefore AB=\sqrt{AC^2-BC^2}=8$.

由(1)知，四边形 $BDEG$ 是矩形，

设 $GE=x$，

$\therefore BD=x, DE/\!/AB$，



图(2)

$\therefore CD=6-x$，$\triangle CDE\backsim\triangle CBA$，$\therefore \dfrac{CD}{DE}=\dfrac{CB}{BA}$，

$\therefore \dfrac{6-x}{DE}=\dfrac{6}{8}$，$\therefore DE=\dfrac{4}{3}(6-x)$，

$\therefore S_{\triangle GEF}=\dfrac{1}{2}x\times\dfrac{4}{3}(6-x)=-\dfrac{2}{3}(x-3)^2+6$，

$\therefore$ 当 $x=3$ 时，$S_{\triangle GEF}$ 有最大值，最大值为 6，

此时 $CD=6-3=3$.

15.【解】(1) $\because \angle ACB=90°$，$\therefore \angle A+\angle B=90°$.

$\because CD\perp AB$，$\therefore \angle ADC=90°$，$\therefore \angle A+\angle ACD=90°$，

$\therefore \angle B=\angle ACD$.

$\because \angle A=\angle A$，$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle ACD$，

$\therefore \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AC}{AD}$，$\therefore AC^2=AD\cdot AB$. 故答案为 $\angle ACD$，$\dfrac{AC}{AD}$.

(2) $\triangle AEB$ 是直角三角形. 理由如下：

$\because \angle ACE=\angle AFC$，$\angle CAE=\angle FAC$，

$\therefore \triangle ACF\backsim\triangle AEC$，$\therefore \dfrac{AC}{AF}=\dfrac{AE}{AC}$，

$\therefore AC^2=AF\cdot AE$. 由(1)得 $AC^2=AD\cdot AB$，

$\therefore AF\cdot AE=AD\cdot AB$，$\therefore \dfrac{AF}{AB}=\dfrac{AD}{AE}$.

$\because \angle FAD=\angle BAE$，$\therefore \triangle AFD\backsim\triangle ABE$，

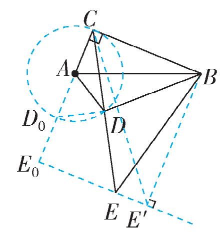
$\therefore \angle ADF=\angle AEB=90°$，$\therefore \triangle AEB$ 是直角三角形.

(3) $\because \angle CEB=\angle CBD$，$\angle ECB=\angle BCD$，

$\therefore \triangle CEB\backsim\triangle CBD$，$\therefore \dfrac{CE}{CB}=\dfrac{CB}{CD}$，

$\therefore CD\cdot CE=CB^2=(2\sqrt{6})^2=24$.

如图，以点 A 为圆心，2 为半径作 $\odot A$，则 C, D 都在 $\odot A$ 上，延长 CA 到 E_0，使 $CE_0=6$，交 $\odot A$ 于 D_0，连接 E_0E，D_0D，则 $CD_0=4$. $\because CD_0$ 为 $\odot A$ 的直径，



$\therefore \angle CDD_0=90°$. $\because CD_0\cdot CE_0=24=CD\cdot CE$，

$\therefore \dfrac{CD_0}{CE}=\dfrac{CD}{CE_0}$. $\because \angle ECE_0=\angle D_0CD$，

$\therefore \triangle ECE_0\backsim\triangle D_0CD$，$\therefore \angle CDD_0=\angle CE_0E=90°$，

$\therefore$ 点 E 在过点 E_0 且与 CE_0 垂直的直线上运动. 过点 B 作 $BE'\perp E_0E$，交 E_0E 的延长线于点 E'，连接 CE'. $\because$ 垂线段最短，$\therefore$ 当点 E 在点 E' 处时，BE 最短，即线段 BE 长度的最小值为 BE' 的长.

$\because \angle CE_0E'=\angle E_0CB=\angle BE'E_0=90°$，

$\therefore$ 四边形 $CE_0E'B$ 是矩形，$\therefore BE'=CE_0=6$，$\angle CBE'=90°$.

在 Rt$\triangle CBE'$ 中，根据勾股定理得 $CE'=\sqrt{(2\sqrt{6})^2+6^2}=2\sqrt{15}$，

即当线段 BE 的长度取得最小值时，线段 CE 的长为 $2\sqrt{15}$.

第五章　四边形

A 湖南真题诊断练

刷 诊断

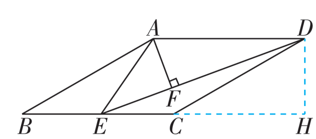
1. C　【解析】在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 互相垂直平分，$\therefore AB=AD, CB=CD, BA=BC$，$\therefore BC=CD=DA=AB$，$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形. $\because AB=3$，$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的周长为 $3\times4=12$. 故选 C.

易错警示

菱形判定的易错点

判定条件	结论	原因
对角线互相垂直且平分的四边形	是菱形	垂直+平分同时满足，符合菱形的判定定理
仅对角线互相垂直的四边形	不一定是菱形	缺少平分条件，可能只是一般四边形
对角线互相垂直的平行四边形	是菱形	符合菱形的判定定理

2. C　【解析】如图，过 D 作 $DH\perp BC$ 交 BC 的延长线于 H. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，



$AB=6$，$\therefore AB/\!/CD$，$AB=CD=AD=6$，$AD/\!/BC$，$\therefore \angle DCH=\angle B=30°$，$\angle ADF=\angle DEH$，$\therefore DH=\dfrac{1}{2}CD=3$. $\because AF\perp DE$，

$\therefore \angle AFD=\angle EHD=90°$，$\therefore \triangle ADF\backsim\triangle DEH$，$\therefore \dfrac{AD}{DE}=\dfrac{AF}{DH}$，

$\therefore \dfrac{6}{x}=\dfrac{y}{3}$，$\therefore y=\dfrac{18}{x}$，故选 C.

3. 205　【解析】$\because$ 五边形 $ABCDE$ 的内角和为 $180°\times(5-2)=540°$，$\therefore \angle A+\angle E=540°-\angle B-\angle C-\angle D=540°-120°-110°-105°=205°$，故答案为 205.

刷有所得

多边形的知识总结

内角和	n 边形的内角和为 $(n-2)\cdot180°(n\geqslant3)$
外角和	n 边形的外角和为 $360°(n\geqslant3)$
对角线	当 $n>3$ 时，n 边形有 $\dfrac{n(n-3)}{2}$ 条对角线